微分積分学基礎 NO.11 要約

今日のテーマ:**積分の正値性**

命題 11.1 (積分の線形性)**.** $[a,b]$ で定義された連続関数 f,g と実数 c に対して、次のことが成り立つ。

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

言うまでもないことだが、不定積分 etc も線形性をもつ。

命題 11.2 (定積分の正値性)**.** $[a,b]$ 上で連続な関数 f にたいして、$f(x) \geq 0$ $(\forall x \in [a,b])$ なら、

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

系 11.3.

(1) $[a,b]$ 上で連続な関数 f,g にたいして、$f(x) \geq g(x)$ $(\forall x \in [a,b])$ なら、

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

(2) $[a,b]$ 上で連続な関数 f と、定数 m, M にたいして、$m \leq f(x) \leq M$ $(\forall x \in [a,b])$ なら、

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

(3) $[a,b]$ 上で連続な関数 f にたいして、$|f(x)| \leq M$ $(\forall x \in [a,b])$ なら、

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

(4) $[a,b]$ 上で連続な関数 f と定数 M にたいして、$|f(x)| \leq M$ $(\forall x \in [a,b])$ なら、

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq M(b-a)$$

上記系をうまく用いることで下の定理の左辺を評価できる。

定理 11.4. f が C^{n+1}-級であるとき、

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$