Non-commutative Kähler projective varieties

“土基” “non-commutative” で $\boxed{\text{検索}}$

前にやったこと

Weyl-Clifford 環

$\downarrow$

$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上の sheaf of algebras $\mathcal{WC}$, $\mathcal{A}$

$\tilde{\Omega}$ と $\tilde{\bar{\Omega}}$

- $\mathcal{WC}$ は Dolbeault 複体と似ている。
- ただし、 form として、$\Omega_{\mathbb{P}^n} \boxtimes \bar{\Omega}_{\mathbb{P}^n}$ のみではすこし足らない。
- $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ のファイバー方向の微分形式が残る。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^{n+1} \times \bar{\mathbb{A}}^{n+1} \arrow[d, "\pi\times\pi"] & \Omega \boxtimes \bar{\Omega} \arrow[d] \\ \mathbb{P}^n \times \bar{\mathbb{P}}^n & \tilde{\Omega} \boxtimes \tilde{\bar{\Omega}} \end{tikzcd} \quad = (\pi \times \pi)_*(\Omega_{\mathbb{A}^{n+1}} \boxtimes \bar{\Omega}_{\mathbb{A}^{n+1}})^{\mathbb{G}_m}$$

$$\mathcal{WC} \cong \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{\Omega} \boxtimes \tilde{\bar{\Omega}}(-l,-l) \qquad (\leftarrow C \text{ の分})$$

WC の 代数としての微分は $\partial, \bar{\partial}$ とは少し異なる。

$$\mathfrak{d} = -k \otimes \bar{l}_0 + \partial \otimes 1$$

$$\bar{\mathfrak{d}} = -l_0 \otimes k + 1 \otimes \bar{\partial}$$

局所的に書くと

$\{X_0 \neq 0\}$ に於いては、

$$\Omega_{\mathbb{P}^n} \leftrightarrow \Bbbk[x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n]$$

$$\widetilde{\Omega_{\mathbb{P}^n}} \leftrightarrow \Bbbk[X_0^{-1} dX_0, x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n]$$

sparse differential forms

$$\Omega_{\mathbb{P}^n} \leftrightarrow \Bbbk[x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n]$$
$$\Omega_{\mathbb{P}^n,\text{sparse}} \leftrightarrow \Bbbk[x_1^p, \dots, x_n^p, x_1^{p-1}dx_1, \dots, x_n^{p-1}dx_n]$$
$$\widetilde{\Omega_{\mathbb{P}^n}} \leftrightarrow \Bbbk[X_0^{-1}dX_0, x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n]$$
$$\widetilde{\Omega_{\mathbb{P}^n,\text{sparse}}} \leftrightarrow \Bbbk[X_0^{-1}dX_0, x_1^p, \dots, x_n^p, x_1^{p-1}dx_1, \dots, x_n^{p-1}dx_n]$$

Deligne-Illusie-Cartier 理論の簡単な場合としてわかること:

$$(\Omega_{\mathbb{P}^n,\text{sparse}}, 0) \overset{q.i.}{\sim} (\Omega_{\mathbb{P}^n}, \partial)$$
$$(\widetilde{\Omega}_{\mathbb{P}^n,\text{sparse}}, 0) \overset{q.i.}{\sim} (\widetilde{\Omega}_{\mathbb{P}^n}, \partial)$$

→ $\mathcal{WC}$, $\mathcal{A}$ の cohomology がわかる。→ spectral sequence

variety V に関して。

はじめのアイディア: 射影代数多様体 V にたいし、 $\mathcal{A}$ を

$$I_V^p + \bar{I}_V^p$$

で普通に割る。つまり、

Definition

$\mathcal{A}_V \overset{\text{def}}{=} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}^{(p)}} \mathcal{O}^{(p)}/(I_V^p, \bar{I}_V^p)$

を考える。
$\mathcal{WC}$ etc に出てくる sheaves は $\mathcal{O}^{(p)}$ 上 flat なので、言い換えればそれらはそれら自身の flat resolution でもあり、$\overset{\mathbb{L}}{\otimes}$ するには単に $\otimes$ すれば ok. 出てくる cohomology は:

$$H^\bullet(V; i^*\Omega^\bullet_{\mathbb{P}^n}) \otimes H^\bullet(\bar{V}; i^*\tilde{\bar{\Omega}}^\bullet_{\mathbb{P}^n})$$

- $i^*\Omega_{\mathbb{P}^n}$ を Ω_V にまで減らしたい。

$\mathcal{B}_V, \overline{\mathcal{B}_V}$

$\{f^{p-1}df | f \in I_V\}$, $\overline{\{f^{p-1}df | f \in I_V\}}$
で割る必要がある。ただし、通常の手法ではない。

Definition

$$\mathcal{B}_V \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{p-1}df | f \in I_V\} + \partial\mathcal{O}_V \ ,$$

$$\mathcal{B}_V \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{f^{p-1}df | f \in I_V\}} + \bar{\partial}\overline{\mathcal{O}_V}$$

手法。

Definition

$\mathcal{B}$: $\mathcal{A}$ の egg とは、$\partial\mathcal{B} = 0$ and $\mathcal{B} \supset \partial\mathcal{A}$ のときにいう。

Definition

F: left exact functor にたいして、
$\mathcal{A}$ の injective resolution $\mathcal{I} \overset{\varphi}{\supset} \mathcal{A}$ をとり、

$$R^{\bullet}F_{\partial,/\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{Ker}(\partial : F(\mathcal{I}) \to F(\mathcal{I}))}{F(\varphi(\mathcal{B})) + \partial F(\mathcal{I})}$$

と定義する。

relative derived functor と称したいところだが、その名前のものはすでにある。それと同じものとみなせるか否かも良くわからない。

今回の結果

Proposition

$$R\Gamma_{\mathfrak{d},/\mathcal{B}_V}\mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}},/\overline{\mathcal{B}_V}}(\mathcal{A}_V) \cong H(\Omega_V) \otimes H(\widetilde{\Omega_{\bar{V}}})$$

V - $\bar{V}$ 対称性 や spectral sequence の存在についてはまだ良くわからない。