# 微分積分学基礎 NO.9 要約

今日のテーマ:**三角関数、指数関数**

単位円周上の点 $P(x,y)$ に対して、$OP$ と、$x$ 軸上の正の部分とのなす角を $\theta$ と書くことにする。(単位は弧度を用いる。) $x,y$ は $\theta$ の関数と見ることができるので、

$$x=\cos(\theta),\quad y=\sin(\theta)$$

と書いて、$\cos,\sin$ を定義する。

図形的性質 (原点のまわりに $\alpha$ ラジアン回転して $\beta$ ラジアン回転したものは結局 $\alpha+\beta$ ラジアン回転したものである) により、三角関数の加法定理が従う。

$$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$$

複素数平面を用いると:

(1) $z$ の $i$ 倍 $iz \leftrightarrow z$ を原点のまわりに $\frac{\pi}{2}$ 回転したもの
(2) $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha) \leftrightarrow 1$ を原点のまわりに $\alpha$ 回転したもの
(3) $i(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)) \leftrightarrow i$ を原点のまわりに $\alpha$ 回転したもの ($\because$ (1))
(4) $(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))z \leftrightarrow z$ を原点のまわりに $\alpha$ 回転したもの ($\because$ (2,3))

つまり、「原点のまわりに $\alpha$ 回転する」という動作が $(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))$ を掛ける」という操作で説明されるのである。

$b>1$ に対して、$b,b^2,b^3,\ldots$ は $b$ を繰り返し掛けることで定義される。$b^0=1, b^{-1}=\frac{1}{b}, b^{-2}=\frac{1}{b^2}$. 整数 $m$ と正の整数 $n$ に対して、

$$b^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{b})^m$$

と定義し、一般の実数 $r$ に対して、$b^r$ を $r$ を有理数で近似したものの極限として定義する。

$x\mapsto b^x$ の $0$ での微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$$

である。これが存在して、$1$ であるような $b$ をとる。そのようなものが

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

である。定義により任意の実数 $x,y$ に対して、

$$e^{x+y}=e^xe^y$$

が成り立つ。(指数法則)

実数 $x$ に対して、次のことが成り立つ:

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k,\quad \cos(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k},\quad \sin(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

このことさえ知っていれば、最初から $e^x,\cos,\sin$ をこの式で定義することも可能である。さらに、 これを用いると、$x$ が複素数の範囲であっても $e^x,\cos(x),\sin(x)$ が定義され、

$$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$$

が従う。