線形代数学 II NO.6 要約

今日のテーマ: **直交射影を表す行列 (2)**

先週に引き続き以下でも、標準的な内積を用いる。

P の像 (Image) と核 (Kernel) の定義にも注意しておこう。$\mathbb{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

- $\mathbb{v} \in \mathrm{Image}\, P \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathbb{v} = P\mathbb{x} (\exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n)$
- $\mathbb{v} \in \mathrm{Ker}\, P \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} P\mathbb{v} = \mathbf{0}$

補題 6.1. *n 次正方行列 P は $P^2 = P$ を満たすときべき等であるという。P がべき等で、$Q = E_n - P$ とおくとき:*

(1) Q もべき等である。
(2) $PQ = 0, QP = 0.$
(3) $\mathrm{Image}(P) + \mathrm{Image}(Q) = \mathbb{R}^n.$
(4) $\mathrm{Image}(P) \cap \mathrm{Image}(Q) = \{\mathbf{0}\}.$
(5) $\mathrm{Image}(P) \perp \mathrm{Image}(Q)$ と ${}^tP = P$ とは同値.

正方行列 P について、つぎのことにも注意しておく。(上記補題の幾何学的な言い換え)

- $P^2 = P \Leftrightarrow P$ が $\mathrm{Image}(P)$ の各元を変えない
- P がべき等なら、$\mathbb{v} \in \mathrm{Image}\, P \Leftrightarrow \mathbb{v} = P\mathbb{v}$.
- P がべき等のとき、$Q = E_n - P$ とおけば、
  ${}^tP = P \Leftrightarrow P = {}^tPP \Leftrightarrow (Q\mathbb{v}, P\mathbb{w}) = 0\ (\forall \mathbb{v}, \mathbb{w} \in \mathbb{R}^n)$