線形代数学 II NO.15

例題 15.1. $\mathbb{R}^2$ に標準内積を入れて、

$$\mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおく。

(1) $\mathbb{v}_2 + \mathbb{R}\mathbb{v}_1$ の元で $\mathbb{v}_1$ と直交するものをすべて求めなさい。そのうちの一つを $\mathbb{w}_2$ とおく。
(2) $\mathbb{v}_1, \mathbb{w}_2$ のそれぞれを適当な定数倍して $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底を作りなさい。

例題 15.2. a, b は複素数とする。

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ a & b & 3 \end{pmatrix}$$

とおく。B を $\mathbb{C}^3$ から $\mathbb{C}^3$ への線形写像と同一視する。このとき

(1) B の固有値をすべて求めよ。
(2) B の各固有値に属する固有ベクトル空間をそれぞれ求めよ。
(3) B を対角化せよ。

15.1
講義で言っていたものは計算が違っていたので注意。
(1)

$$\mathbb{w}_2 = \mathbb{v}_2 - \frac{3}{2}\mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

15.2.
(1) B の固有値は $2, -5, 3.$

(2) B の 2 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2a-5b \end{pmatrix}$ B の -5 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{8}(-a+b) \end{pmatrix}$ B の 3 に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3)

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ -2a-5b & \frac{1}{8}(-a+b) & 1 \end{pmatrix}$$

で、

$$P^{-1}BP = \mathrm{diagonal}(2, -5, 3).$$