

代数学 IA NO.6 要約

今日のテーマ: 剰余集合

定理 6.1. G を群、 H をその部分群とする。このとき、

(1) G にクラス分け \sim_H が

$$g_1 \sim_H g_2 \Leftrightarrow \exists h \in H \text{ such that } hg_2 = g_1$$

により定まる。($g_1 \sim_H g_2$ のことを「 g_1 と g_2 とは H を法として右合同である」と表現する。)

(2) 各 $g \in G$ の \sim_H によるクラスは Hg と等しい。

(3) 各 $g \in G$ に対して、

$$H \ni h \mapsto hg \in Hg$$

は H と Hg との間の全単射を与える。

定義 6.2. G を群、 H をその部分群とする。このとき、定理 6.1 で定まるクラス分け \sim_H によるクラスの全体の集合を $H \backslash G$ と書き、 G の H による右剰余集合という。

上と同じようなことが、

$$g_1 \equiv_H g_2 \Leftrightarrow \exists h \in H \text{ such that } g_1 h = g_2$$

という別のクラス分けでも考えられる。 \equiv_H のことを H による左合同関係といい、 G を \equiv_H でクラス分けしたクラスの全体を G/H と書く。 G/H は G の H による左剰余集合と呼ばれる。