理工系線形代数学 NO.12 要約

今日のテーマ: 線形写像、線形変換
　ベクトル空間 V から ベクトル空間 W への写像で、和を和に、スカラー倍をスカラー倍に写すものを線形写像という。ベクトル空間 V からそれ自身への線形写像を線形変換という。

命題 12.1. ベクトル空間 V, W の基底をとると、V から W への線形写像は行列で書くことができる。V, W の次元をそれぞれ n, m とすると、その行列は $M_{m,n}(\mathbb{R})$ の元である。とくに、V から V への線形変換は $M_n(\mathbb{R})$ の元で表現できる。

定義 12.2. 線形写像 $f : V \to W$ に対して、その核 $\mathrm{Ker}(f)$ と像 $\mathrm{Image}(f)$ を

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbb{v} \in V; f(\mathbb{v}) = \mathbf{0}\},$$
$$\mathrm{Image}(f) = \{f(\mathbb{w}); \mathbb{w} \in W\}.$$

で定義する。

　行列の行基本操作を使うことにより、次のことがわかる。

命題 12.3 (次元定理)**.** $f : V \to W$ が有限次元ベクトル空間の間の線形写像なら、

$$\dim \mathrm{Image}(f) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(f)$$

この量は $\mathrm{rank}\, A$ と等しい。

　線形変換では、「変換後と変換前を比べる」ことができる。とくに、対角行列による変換は考えやすい。

定義 12.4. $A = (a_{ij})$ が対角行列であるとは、対角成分以外の成分が 0, すなわち

$$a_{ij} = 0 \qquad (i \neq j \text{ のとき})$$

が成り立つときにいう。

　スペースの都合で、この「要約」では「対角行列 $D = \mathrm{diagonal}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$」という書き方をする。対角成分が $d_1, \ldots, d_n$ であとは 0 であるような行列という意味である。
　対角行列同士の和や積は特別に易しい。これは、対角行列 $D = \mathrm{diagonal}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ に対しては、基本ベクトル $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n$ が

$$D\mathbb{e}_1 = d_1\mathbb{e}_1, \quad D\mathbb{e}_2 = d_2\mathbb{e}_2, \quad D\mathbb{e}_3 = d_3\mathbb{e}_3, \quad \ldots, \quad D\mathbb{e}_n = d_n\mathbb{e}_n,$$

を満たしているからである。

命題 12.5. 対角行列 $A = \mathrm{diagonal}(a_1, \ldots, a_n)$, $B = \mathrm{diagonal}(b_1, \ldots, b_n)$ に対して、

(1) $A + B = \mathrm{diagonal}((a_1 + b_1), \ldots, (a_n + b_n))$.
(2) $A - B = \mathrm{diagonal}((a_1 - b_1), \ldots, (a_n - b_n))$.
(3) $cA = \mathrm{diagonal}(ca_1, \ldots, ca_n)$ ($c \in \mathbb{R}$.)
(4) $AB = \mathrm{diagonal}(a_1b_1, \ldots, a_nb_n)$.

つまり、対角行列の線形結合、積は成分ごとに行って良い。