線形代数学 II NO.15

例題 15.1.

$$\mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく。

(1) $\mathbb{v}_2 + \mathbb{R}\mathbb{v}_1$ の元で $\mathbb{v}_1$ と直交するものをすべて求めなさい。そのうちの一つを $\mathbb{w}_2$ とおく。

(2) $\mathbb{v}_3 + \mathbb{R}\mathbb{v}_2 + \mathbb{R}\mathbb{v}_1$ の元で $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$ の 2 つと直交するものをすべて求めなさい。そのうちの一つを $\mathbb{w}_3$ とおく。

(3) $\mathbb{v}_1, \mathbb{w}_2, \mathbb{w}_3$ のそれぞれを適当な定数倍して $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を作りなさい。

例題 15.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とおく。

(1) A の固有値をすべて求めなさい。

(2) A の各固有値に属する固有ベクトル空間をそれぞれ求めなさい。

(3) A を対角化しなさい。

(4) A を直交行列を用いて対角化しなさい。

15.1

(1)

$$\mathbb{w}_2 = \mathbb{v}_2 - 2\mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\mathbb{w}_3 = \mathbb{v}_3 - \frac{1}{3}\mathbb{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbb{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

(3)

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

15.2.

(1) A の固有値は $-3, 2, 2$.

(2) A の -3 に対する固有ベクトル空間は $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

A の 2 に対する固有ベクトル空間は $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(3)

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で、

$$P^{-1}AP = \mathrm{diagonal}(-3, 2, 2).$$

(4)

$$U = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で、

$$U^{-1}AU = \mathrm{diagonal}(-3, 2, 2).$$