

任意の体 K に対して K を含む代数的閉体が存在する。(2)

「任意の体 K に対して K を含む代数的閉体が存在する。」(無印だが、以下では便宜上「(1)」と呼ぶことにする)において、次の「主張 2」に言及した。

主張 2

体 K とその拡大体 L が、次の性質を満たしたとする。

(※)

K 上の任意の既約一変数モニック多項式 p について、その少なくとも一つの根が L 内に存在する。

このとき、

$$M = \{x \in L; x \text{ は } K \text{ 上代数的}\}$$

とおけば、 M は K を含む代数閉体である。

今回は、分離性の知識を用いて、次のこと(主張 2s)を証明する。(議論をいくらか簡潔にするため、全体は大きな代数的閉体 Ω に埋め込まれていると考えることにする。 Ω としては(1)すでに証明した K の代数的閉包(議論としてはそれで十分なことを確認できるが、それで物足りなければ L の代数的閉包)を用いてもよい。)

主張 2s

K とその拡大体 L が、主張 2 の性質(※)を満たしたとする。このとき、

$$L_s = \{x \in L; x \text{ は } K \text{ 上分離代数的}\}$$

とおけば、 L_s は K 上分離代数的な(Ω の)元をすべて含む。つまり、 L_s は K の分離閉包である。

K の標数が 0 なら、分離性の仮定は常に満足されるから、そのときには主張 2 も正しいことがわかる。

[主張 2s の証明]

K 上分離代数的な元 α をとる。 α の最小多項式を f と書き、 f の根を $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ と置くと、 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ は α の K 上の共役の全体と等しく、 $M = K(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ は K の有限個の分離的な元による拡大であるから、 K の単純拡大である(No.6, 系 6.9)。すなわち、ある θ が存在して、 $M = K(\theta)$ 。

θ の最小多項式 g は仮定(※)により少なくとも一つの根 θ_1 を L にもつ。「ガロア理論の第一歩」により、

$$K(\theta_1) \cong K(\theta).$$

f は $K(\theta)$ 上一次式の積に分解されるから、 $K(\theta_1)$ でもそうである。つまり、 f の根 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ はすべて M に属する。□