

## 環論 NO.3 要約

今日のテーマ: イデアル、「生成されるイデアル」

**定義 3.1.**  $R$  は単位元をもつ環であるとし、 $I$  はその部分集合であるとする。 $I$  が  $R$  のイデアルであるとは、次の条件が成り立つときにいう。

- (1)  $I$  は  $(R, +)$  の部分群である。すなわち、 $I$  は  $R$  の加・減法について閉じている。
- (2)  $I$  の元に  $R$  の元を右から掛けても左から掛けてもやっぱり  $I$  の元になる。すなわち、任意の  $x \in I$  と任意の  $r \in R$  について、

$$rx \in I, xr \in I$$

が成り立つ。

**例 3.1** (イデアルの例).

- (1)  $10\mathbb{Z}$  は  $\mathbb{Z}$  のイデアルである。
- (2) もっと一般に、 $n > 0$  にたいして、 $n\mathbb{Z}$  は  $\mathbb{Z}$  のイデアルである。
- (3) 更に一般に、任意の可換環  $R$  と任意の  $a \in R$  にたいして、 $aR$  は  $R$  のイデアルである。
- (4) 任意の環  $R$  に対して、 $\{0\}$  は  $R$  のイデアルである。

「生成される部分環」を扱った時と同じ議論で、次のことが成り立つことがわかる。

**補題 3.1.** 環  $R$  の部分集合  $S$  が与えられているとする。このとき、 $S$  を含む  $R$  のイデアルのうち、最小のものが存在する。(これを  $S$  で生成される  $R$  のイデアルといい、 $\langle S \rangle_{R\text{-イデアル}}$  とか、 $(S)$  と書く。)

**例 3.2.** 環  $\mathbb{Z}$  のイデアルとして、次のことが成り立つ。

- (1)  $(2) = 2\mathbb{Z}$ .
- (2)  $(10) = 10\mathbb{Z}$ .
- (3)  $(12, 18) = 6\mathbb{Z}$ .
- (4)  $(10, 24) = 2\mathbb{Z}$ .

**例 3.3.** 環  $\mathbb{Q}$  のイデアルとして、次のことが成り立つ。

- (1)  $(2) = \mathbb{Q}$ .
- (2)  $(10) = \mathbb{Q}$ .
- (3)  $(12, 18) = \mathbb{Q}$ .
- (4) 上の例に限らず全ての  $\mathbb{Q}$  のイデアルは  $\{0\}$  か  $\mathbb{Q}$  自身である。

上の2つの例を比較すると分かるように、どの環で考えるかが大変重要である。

**問題 3.1.**  $\mathbb{Z}$  のイデアル  $I$  が 4615 と 1469 を元として含むとき、13 も  $I$  の元であることを示しなさい。