

線形代数学 II NO.12 要約

今日のテーマ: べき零行列の標準形

今回も引き続き、行列は複素数体 \mathbb{C} 上で考える。

定義 12.1. 行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ がべき零であるとは、ある正の整数 N が存在して $A^N = O$ が成り立つときにいう。

行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が与えられているとする。 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \exists N > 0 \text{ such that } (A - \lambda E_n)^N v = \mathbf{0}\}$$

のことを A の λ に属する弱固有空間と呼ぶのであった。 A は弱固有空間 V_λ 上に作用していて ($AV_\lambda \subset V_\lambda$), $A - \lambda E_n$ は V_λ 上べき零である。

したがって、べき零行列の標準形が興味の対象になる。

補題 12.2. $N \in M_n(\mathbb{C})$ について、次のことは同値である。

- (1) N はべき零である。
- (2) N は、対角成分がすべて 0 であるような上半三角行列と相似である。

系 12.1. $N_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ はべき零行列である。

N_n は基本ベクトルを $e_n \mapsto e_{n-1} \mapsto e_{n-2} \mapsto \dots \mapsto e_2 \mapsto e_1 \mapsto \mathbf{0}$ と写すことに注意。

定理 12.3. 任意のべき零行列は

$$\begin{pmatrix} N_{k_1} & & & & & & \\ & N_{k_2} & & & & & \\ & & N_{k_3} & & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & N_{k_2} & \\ & & & & & & N_{k_1} \end{pmatrix}$$

の形の行列と相似である。