線形代数学II　No. 2

内積

$$V \times V \to \mathbb{R}$$

例1.

$V = \mathbb{R}^2$ のとき.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd$$

$V = \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = ap + bq + cr$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

例2

$$V = C([0,1]) = \{[0,1] \to \mathbb{R}\ \text{連続}\}$$

~~f, g~~ $f, g \in V$ に対して

$$f \cdot g = \int_0^1 f\cancel{(x)g(x)}dt$$

$$f \cdot g = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \qquad (L^2\text{内積})$$

例3

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \overset{\mathrm{df}}{=} ac + 5bd$$ ⇐ Vの内積を定義.

定義2.3
V：内積空間
(計量ベクトル空間)

$V \ni v$ の長さ

$$\sqrt{v \cdot v} = \|v\|$$

命題2.4

(1)
$$\|a + b\|^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$
$$= \cancel{a \cdot (b + d}$$
$$= a(a + b) + b(a + b)$$
$$= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$
$$= \|a\|^2 + 2a \cdot b + \|b\|^2$$

や $\boxed{2.A}$ (やらなくともよい)

2.4を証明せよ

内積 $\xrightarrow{2.3}$ 長さ

Th. 2.5

Prop 2.6

Th　$a, b \in V$ に対して

$$\frac{a \cdot b}{\|a\| \cdot \|b\|} \quad \text{絶対値} \leq 1$$

$$\|$$

$$\cos\theta$$

θ : a と b のなす角.

メールに YM02 と入れる.

No.

Date

$$= a_1 b_1 \cdot 2 + a_1 \cdot b_2 \cdot (-4) + a_1 \cdot b_3 \cdot 6$$

$$+ \cdots$$

$$= (a_1\ a_2\ a_3) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 11 & -9 \\ 6 & -9 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ (同じ)

$$= (a_1\ a_2\ a_3)\ A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(2) ガチ.

(3) むつかしいけどガチ

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\t\end{pmatrix}=3+4+2t$$

これが0になる $\Leftrightarrow$ $7+2t=0$

$\Leftrightarrow$ (ガ4)

$t=\boxed{}$

2.2

$$\underbrace{(\mathbb{v}_i\cdot\mathbb{v}_j)_{i,j}}_{\text{グラム行列}}=\begin{pmatrix}2 & -4 & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$$

(1) $(a_1\mathbb{v}_1+a_2\mathbb{v}_2+a_3\mathbb{v}_3)\cdot(\underline{})$

$$=\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\mathbb{v}_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}b_j\mathbb{v}_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_ib_j\underbrace{(\mathbb{v}_i\cdot\mathbb{v}_j)}_{\text{Aの成分}}$$

$=$

Th.2.5　$t \in \mathbb{R}$

$$(\mathbb{a}+t\mathbb{b})\cdot(\mathbb{a}+t\mathbb{b}) \geq 0$$

$$\|$$

$$\|\mathbb{a}\|^2 + 2t(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}) + \|\mathbb{b}\|^2 t^2$$ 　tの2次式

$$D/4 \leq 0$$

$$\|$$

$$(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})^2 - \|\mathbb{a}\|^2\|\mathbb{b}\|^2$$

$$(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})^2 \leq \|\mathbb{a}\|^2\|\mathbb{b}\|^2$$

$$|(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})| \leq \|\mathbb{a}\|\cdot\|\mathbb{b}\| \rightarrow (1)$$

(2)　$\|\mathbb{a}+\mathbb{b}\|^2$ と $(\|\mathbb{a}\|+\|\mathbb{b}\|)^2$ を比べれ

ばよい → 展開.