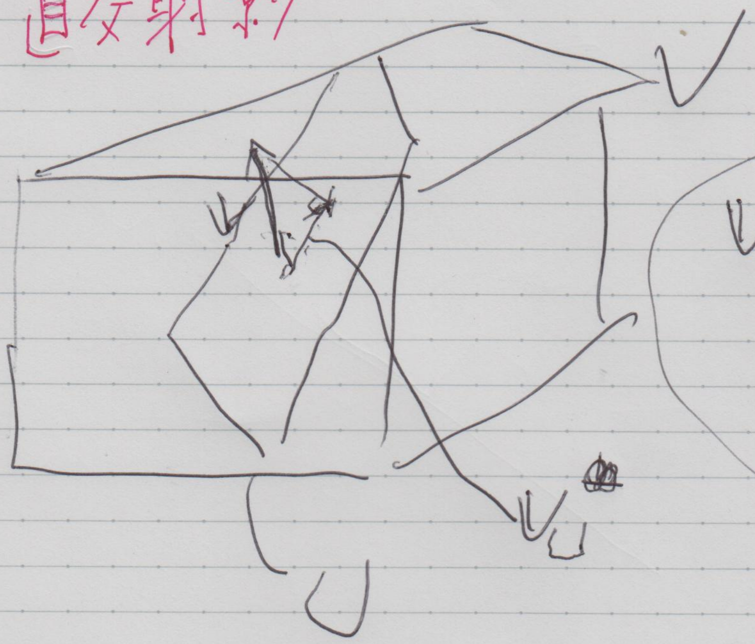
直交射影



$$\mathbb{V} \xmapsto[A]{} \mathbb{V}_U$$

$$\xmapsto[A]{} (\mathbb{V}_U)_U = \mathbb{V}_U$$

$$A^2 = A$$

行列AがあるUにかんする直交射影
なのはいつか？

Aが直交射影 $\Longleftrightarrow$ $A^2 = A$ かつ ${}^tA = A$

P : 正方行列 : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Image}\, P = \{ P v \mid v \in \mathbb{R}^n \}$$
$$= P\mathbb{R}^n$$

$$\ker P = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid P v = 0 \}$$

P : 冪等 $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $P^2 = P$

$$P^3 = P^2 \cdot P = P \cdot P = P^2 = P$$
$$P^n = P \quad (n \geq 2)$$

P : 冪等 $\Rightarrow$ $Pv = v$

$v \in \mathrm{Image}\, P$ に対して

$v = Pw$ $\quad \exists w$

$$Pv = P(Pw) = P^2 w = Pw$$

P : 巾等 $\Leftrightarrow P^2 = P$

$\Leftrightarrow \quad P(\underbrace{I_n - P}_{= Q}) = O_n$

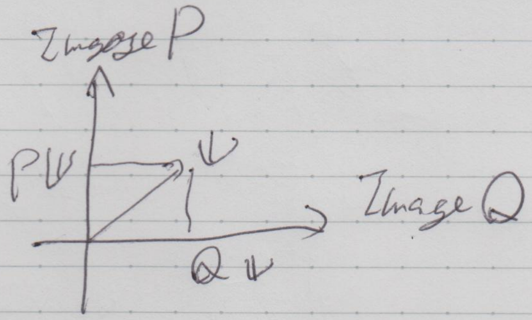
$Q^2 = Q$

$Q^2 = (1-P)^2 = 1-2P+P^2 = 1-P$

$= Q$

$v \in \mathbb{R}^n$

$v = Pv + Qv$



$\mathrm{Image}\,P \perp \mathrm{Image}\,Q$

$\iff \forall v, \forall w$ に対し

$Pv \perp Qw \quad (\forall v\ \forall w)$

$\iff {}^t(Pv)\cdot Qw = 0 \quad (\forall v\ \forall w)$

$\iff {}^tv\,{}^tPQw = 0 \quad (\forall v\ \forall w)$

$\iff {}^tPQ = 0$

理由

$(\Leftarrow)$：明らか

$(\Rightarrow)$：$v = e_i,\ w = e_j$（基本ベクトル）

の場合を考えると

$$\underbrace{({}^tPQ)_{ij}}_{({}^tPQ)\text{の } ij \text{ 成分}} = 0$$