完備化定理

X : metric space　　d : metric

$\bar{X} = \mathrm{Cauchy}(X)/\equiv$: metric space, $\boxed{\text{complete}}$

$\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Cauchy}(X)/\equiv$, Cauchy列

$\exists ?$ $\{x_j\}$: $\underline{\text{converge}}$ ― 収束先は?

各jに対して

x_j : X の Cauchy列 i.e. $x_j = \{x_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ (のクラス)

$$
\begin{array}{lllllll}
\bar{X} \ni x_1 & \leftarrow & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & \\
x_2 & \leftarrow & x_{21}, & x_{22}, & x_{23} & x_{24}, & \text{―} \\
x_3 & \leftarrow & x_{31} & & & & \\
x_4 & \leftarrow & x_{41} & & & & \\
x_5 & \leftarrow & x_{51} & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

対角線

idea

x_i を $x_i = (\{x_{i\ell}\}$ のクラス$)$ $(x_{i\ell}$ の $\ell \to \infty$ の limit$)$

としたとき、

$x_{i\ell}$ の ℓ についての部分列をとって、

$x_{i\ell} \xrightarrow{\ell\to\infty} x_i$ のスピードが一様に

なるようにする。

→ 対角線をとるとうまくいく。

・位相環

R ：位相環

$\iff$ R ：$\begin{cases} \text{位相空間} \\ \text{環} \end{cases}$ が共調的（和・差・積が連続）

$$\begin{array}{ccc} R \times R & \xrightarrow{\text{和}} & R \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (a, b) & \longmapsto & a+b \end{array} \quad \text{：連続}$$

$f(a, b) = \cancel{f} \; a+b$ は連続

・$\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}_p$

$\mathbb{Z}$ の $|\cdot|_p$ にかんする完備化.

$[0.a_1a_2a_3a_4]_p$ ← $\mathbb{Z}$ の元のかわった表記

($\mathbb{N}_0$ ver)

「有限小数」

$\mathbb{Z}_p$:「無限小数」

$$[0.222\cdots]_3 + \underbrace{[0.1]_3}_{1_{\mathbb{Z}_3}} = 0$$

$$\to -[0.1]_3 = [0.222\cdots]_3$$

$$\quad\quad \text{''} \; -1_{\mathbb{Z}_3} \; \text{''}$$

$$(-1)\cdot a = -a. \quad (\forall a \in \mathbb{Z}_3)$$

$\mathbb{Z}_p$ の各元は $[0.a_1a_2\cdots]$ $(a_1, a_2, \cdots \in \{0, 1, 0\})$

と書ける.

例 $\mathbb{Z}_p$ の元

$$a = [0.a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots]_p$$

$(a_0, a_1, a_2, a_3 \in \{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\})$

と書ける.

ここのハナシ：

a_0 : aを「pで割った余り」をみている.

aをp^2で割った余りをみている.

$\boxed{\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \text{ の世界}}$

9:50〜

Exercise 3. A

射影極限の存在を証明せよ.

(位相構造でなくともよい)

$\{X_\lambda\}$ の射影極限

$\prod_\lambda X_\lambda$ 直積

$\cup$

$\mathfrak{X} = \{ (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mid {}^\forall \lambda, \mu \text{ } \lambda < \mu, \ \phi_{\lambda\mu}(x_\mu) = x_\lambda \}$

$\left(\prod_\lambda X_\lambda \text{ の閉集合} \right)$

もし各 X_λ : compact ならば $\prod_\lambda X_\lambda$: compact.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}_p \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & & \cdots \\
\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \arrow[l] & \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \arrow[l] & \mathbb{Z}/p^4\mathbb{Z} \arrow[l] & \mathbb{Z}/p^5\mathbb{Z} \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

projective system

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{Y} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
X_\lambda & & X_\mu \arrow[ll, "\phi_{\lambda\mu}"]
\end{tikzcd}
$$

projective system の上にある.

最大

一番よいやつのことを射影極限という.

universality とは?

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[d] \arrow[dr] & Z \arrow[l] \arrow[dl] \arrow[d] \\
X_\lambda & X_\mu \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Zの方が「大きい」

射影極限 (projective limit)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [0, a_0 a_1 a_2 \cdots]_p & \longmapsto & [a_0 a_1 a_2]_p \end{array}$$

(の $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ でのクラス)

(全射) 環の準同型

$p^3, p^4, \cdots, p^k$ でも考えられる

これらは「共調的」

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft" near start] \\ & \mathbb{Z}/p^{k+1}\mathbb{Z} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

可換

No.

Date

○レポート問題

pdfに限らず

画像でどうぞ

◎ YM03という文字列

を入れて下さい。