・$\mathbb{Z}_p$：極 局所環 → 解析
　　完備

$\mathbb{Z}_p$：$\mathbb{Z}$のp-進キュリに入れる完備化
∪
$p\mathbb{Z}_p$

$\mathbb{Z}_p$の元 $[0.****\cdots]_p$

$p\mathbb{Z}_p$の元 $[0.0***\cdots]_p = m$

・$\mathbb{Z}_p \setminus \underbrace{p\mathbb{Z}_p}_{\| m}$ は必ず可逆

$\mathbb{Z}_p \setminus m \ni [0.\underbrace{a_1}_{\neq 0}\ a_2 \cdots]_p$

a_1 を $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (体) で考えて
逆元 b_1 をとる

$[0.b_1 b_2 \cdots]_p$

完備局所環（解析的）

Zornの補題

・環には必ず極大idealがある

idealをとってくる

↓

さらに大きなものがあれば

それをとる

↓

くりかえす

↓

極大なものがある

pZ (p: 素数) は極大ideal

Zの

$\mathbb{Z}_p \supset p\mathbb{Z}_p$ 　$\mathbb{Z}_p \setminus \mathfrak{m}$ の元は可逆

$p\mathbb{Z}_p = \mathfrak{m}$ (ideal)

$\overline{\mathbb{Z}_p \setminus \mathfrak{m}} = \mathbb{Z}_p \setminus \mathfrak{m}$

→ ① $\mathfrak{m}$ は極大

② $\mathfrak{m}$ は $\mathbb{Z}_p$ の唯1の極大 ideal

(∵) ① $\exists I \supsetneq \mathfrak{m}$ （$\mathbb{Z}_p$ の ideal）とすると、

$I \ni {}^\exists x$ s.t. $x \notin \mathfrak{m}$

x は可逆 i.e. $x^{-1} \in \mathbb{Z}_p$

$1 = x \cdot x^{-1} \in I$ （$x \in I$, $x^{-1} \in \mathbb{Z}_p$） → $I = \mathbb{Z}_p$ がわかる。

---

② $\mathfrak{m}'$: $\mathbb{Z}_p$ の $\mathfrak{m}$ 以外の極大 ideal とする

$\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$ であるから

$\exists x \in \mathfrak{m}'$ s.t. $x \notin \mathfrak{m}$

（そうでなければ $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}$）

x : 可逆

→ $\mathfrak{m}' = \mathbb{Z}_p$ 矛盾

$x \in \mathbb{Z}_p$ とる. $x \notin p\mathbb{Z}_p$ とする.

$y \in \mathbb{Z}_p$ で $xy = 1$ なものをとりたい

$x \cdot y_1 = 1 + (p\mathbb{Z}_p$ の元$)$

なる y_1 が存在.

$x \cdot y_1 = 1 + pc = 1 - pc_1 \quad (c_1 = -c)$

($1 + pc$) これの逆元は? z

$x \cdot y_1 \cdot z = (1 + pc) z = 1$

($y_1 \cdot z$) x の逆元である

$(1 + pc)$ の逆元は $1 - pc + (pc)^2 + \cdots$

$= (1 - pc_1)$ $\quad 1 + pc_1 + (pc_1)^2 + (pc_1)^3 + \cdots$ 収束

$(1 - t)^{-1} = 1 + t + t^2 + \cdots$ (t: 小)

$t = 0.1$

キョリ

~~任意~~空間 X が完備 かつ全有界 $\Leftrightarrow$ X がコンパクト

$\mathbb{Z}_p$ での方程式の解法例

$\mathbb{Z}_7$ での $x^2=2$ の解法

$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ であれば

$$3^2 = 9 = 2 \quad (\text{in } \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$$

$$\left([0.3\cdots]_7\right)^2 = [0.2\cdots]_7$$

$$[0.3]_7^2 = [0.2\underline{1}0000]_7$$

$$9 = 7+2$$

$$([0.3]_7 + \alpha)^2 = [0.21]_7 + \cancel{3\alpha}$$

$$(3+\alpha)^2 = 9+6\alpha+\alpha^2 = \underline{2}+(7+6\alpha+\alpha^2)$$

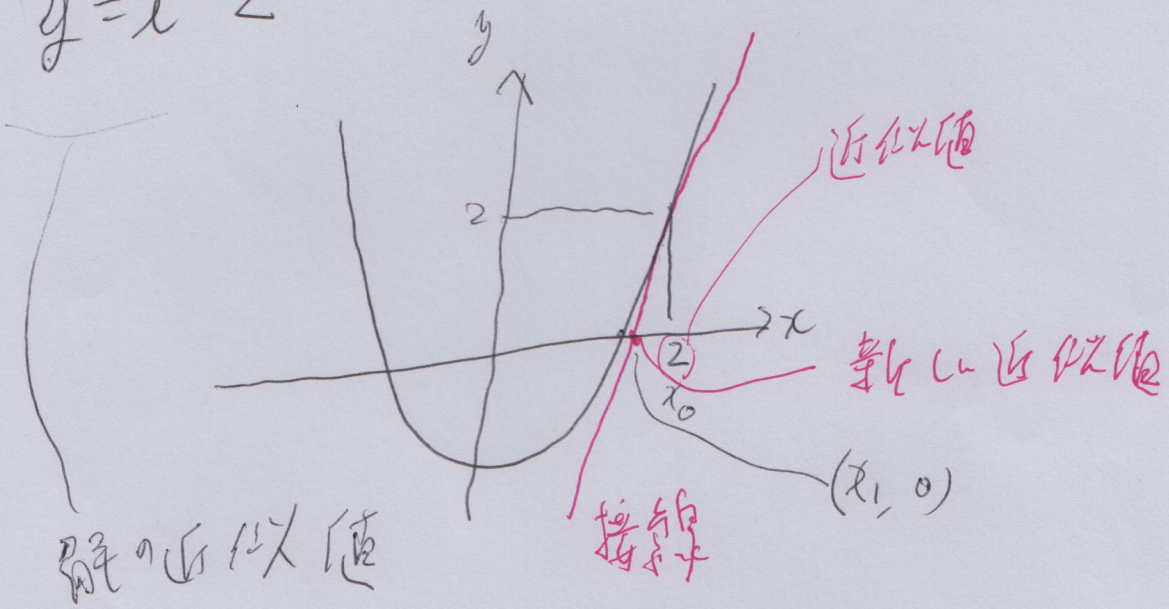
$$(3+7\alpha_1)^2 = 2+7(1+6\alpha_1+7\alpha_1^2)$$

7 の倍数になるようにとれる.

ニュートン法

・解の近似値を求める.
→近似を高める.

$y=x^2-2$



解の近似値

x_0

接線 $y-(x_0^2-2)=2x_0(x-x_0)$

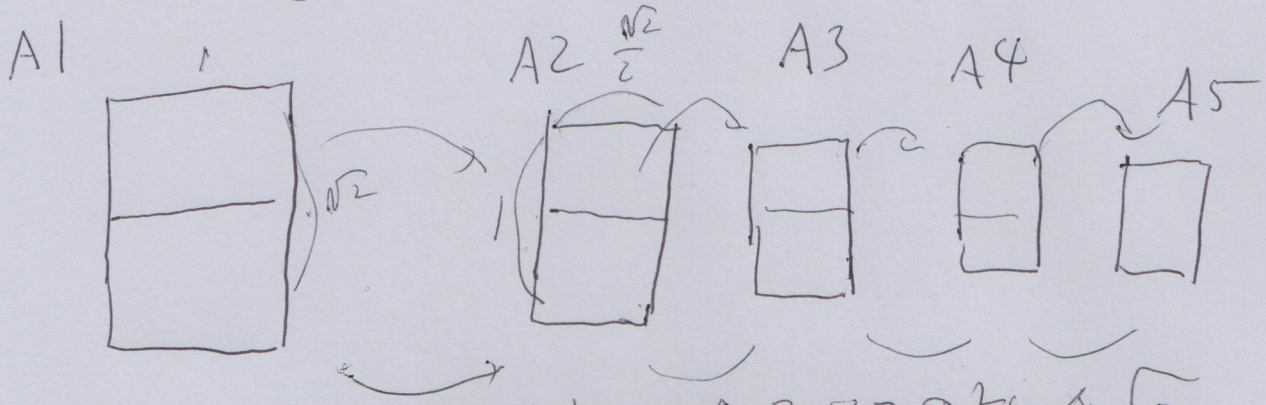
$0-(x_0^2-2)=2x_0(x_1-x_0)$

$x_1=x_0+\dfrac{2-x_0^2}{2x_0}$

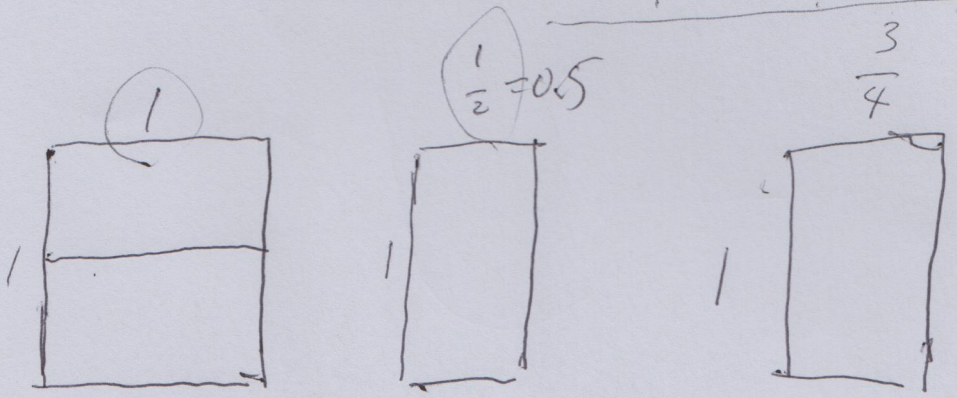
$=\cancel{x_0+}\dfrac{2+x_0^2}{2x_0}=\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{x_0}{2}$

平均 $\left(\dfrac{1}{2x_0}\text{ と }\dfrac{x_0}{4}\right)$

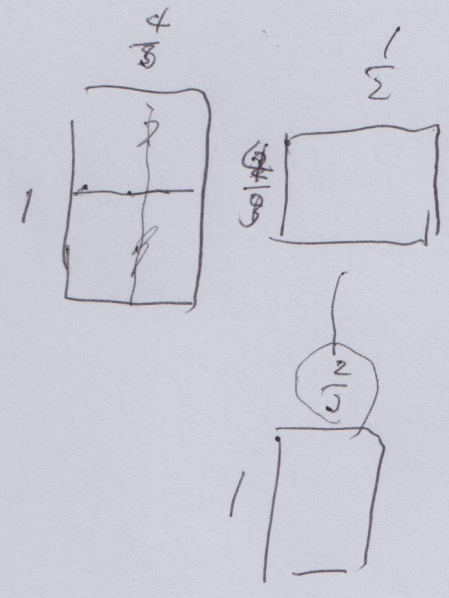
余談 $\sqrt{2}$



相似：たてよこの比が $\sqrt{2}$



$$\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$



$$\frac{4}{3}=1.333\cdots$$

exercise 4A

$x^2 = 3$ を $\mathbb{Z}_{13}$ で解け

$[0.\overset{4}{*}***\cdots]_{13}$ の途中まで
でよい