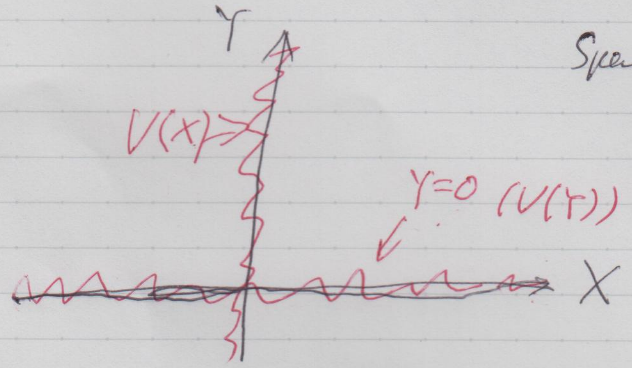
A ring $\supset S_1, S_2$

$V(S_1) \cup V(S_2) \overset{?}{=}$

<u>例</u>

$A = \cancel{\mathbb{Q}}\ \mathbb{C}[X, Y]$



$\operatorname{Spec} A = \mathbb{A}^2$

$\cancel{XY}$ $\qquad \{XY = 0\}$

$V(XY) = V(X) \cup V(Y)$

$V(S_1) \cup V(S_2) \overset{?}{=} V(\{fg \mid f \in S_1 ; g \in S_2\})$
$\supset$
$\subset$

$\subset$ $\quad {}^{\forall}p \in V(S_1)$ に対して

${}^{\forall}f \in S_1$ に対し $\quad \mathrm{eval}_p(f) = 0$

${}^{\forall}g \in S_2$ に対し

$\mathrm{eval}_p(fg) = \underbrace{\mathrm{eval}_p(f)}_{\substack{\parallel \\ 0}} \mathrm{eval}_p(g) = 0.$

ゆえに $p \in$ (右辺).

「⊃」 $^\forall \mathfrak{p} \in$ (右辺) に対し

(i) 「$^\forall f \in S_1$ に対し

$val_{\mathfrak{p}}(f) = 0$」

ならば、$\mathfrak{p} \in V(S_1) \subset$ (左辺)

よりok.

(ii) $^\exists f_0 \in S_1$ に対し

$val_{\mathfrak{p}}(f_0) \neq 0$ とする.

$^\forall g \in S_2$ に対して

$val_{\mathfrak{p}}(f_0 g) = 0$

$\underbrace{val_{\mathfrak{p}}(f_0)}_{\neq 0} = 0$ or $val_{\mathfrak{p}}(g) = 0$

故に $val_{\mathfrak{p}}(g) = 0$ $\therefore \mathfrak{p} \in V(S_2)$

$\subset$ (左辺)

□

$^\forall f \in S_1$ $^\forall g \in S_2$

$val_{\mathfrak{p}}(fg) = 0$

$\shortparallel$

$val_{\mathfrak{p}}(f) \cdot val_{\mathfrak{p}}(g)$

$Q(\underbrace{A/\mathfrak{p}}_{\text{整域}})$

$val_{\mathfrak{p}}(f) = 0$ or $val_{\mathfrak{p}}(g) = 0$

Spec 続論

A : ring.

$X = \mathrm{Spec}(A)$ 位相空間.

$\mathcal{O}_X$ 環の層. (関数空間)

Xの open set

$f \in A$ に対し

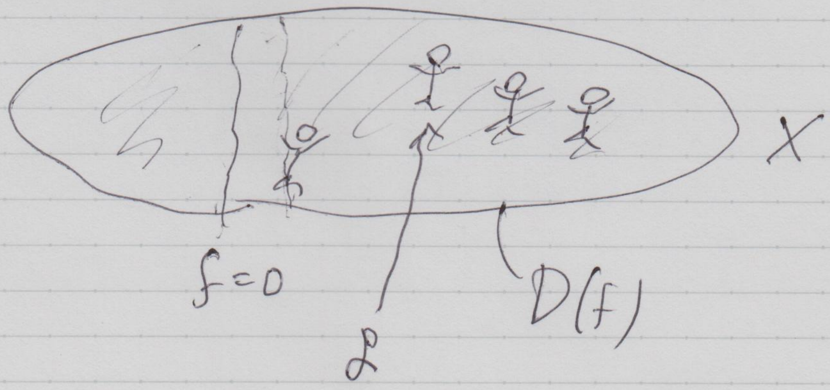
$$D(f) = \{\mathfrak{p} \in X \mid ev_{\mathfrak{p}}(f) \neq 0\}$$

$$(= \complement V(f))$$

$$\parallel$$

$$X \setminus V(f)$$

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = A\left[\frac{1}{f}\right]$$



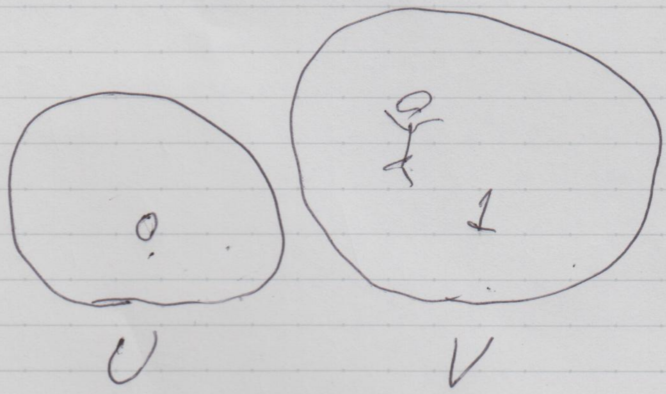
$\mathfrak{p}$のまわりで定義された関数の全体 $= \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$

Xの $\mathfrak{p}$での局所環.

◦ Spec A には層 $\mathcal{O}_X$ がのっている.

$\mathcal{O}_{X,x}$ は局所環.

$\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$



$X = U \cup V$ $\quad U \cap V = \phi$

$\underline{x_V^2 = x_V}$ $\quad x_V(x_V - 1) = 0$

巾等.

No.

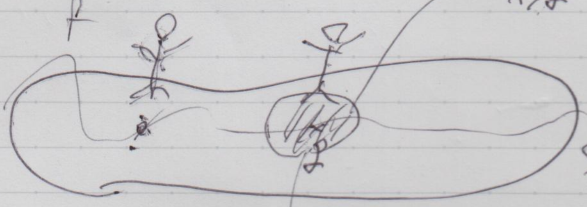
Date

A-module M

$\leftrightarrow$ Spec A 上の sheaf $\tilde{M}$

$$\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} = \left\{ as^{-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} a \in A \\ s \in A \setminus \mathfrak{p} \end{array} \right\}$$

local ring



Spec $A = X$

$$\tilde{M}_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}} = \left\{ ms^{-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} m \in M \\ s \in A \setminus \mathfrak{p} \end{array} \right\}$$

$\underbrace{Q(A/\mathfrak{p})}_{体}$ -moduleとしての

$Q(A/\mathfrak{p}) \otimes (M/\mathfrak{p})$ ベクトル空間

Witt環 (Λ環)

A : ring とする

$$\Lambda(A) = \{(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)_W \mid a_1, a_2, \cdots \in A\}$$

(対数)

$$(f)_W + (g)_W = (f \cdot g)_W$$

$$(1 - at)_W \cdot (f)_W = (f(at))_W$$

$(g)_W \cdot (f)_W$ (g : 多項式)

→ g を形式的に因数分解

(分裂手法)

$\Lambda(A)$: 環

零元 $(1)_W$

単位元 $(1-t)_W$

∘ $\Lambda(A)$: 巾等元をもつ

$(1 - t^n)_W$ を考える

$$(1-aT^n)_W \cdot (1-bT^m)_W$$

$$= (1-a^{\frac{l}{n}} b^{\frac{l}{m}} T^l)^d_W$$

$$(l = \mathrm{lcm}(n,m),\ d = \gcd(n,m))$$

$$(1-aT^n)_W = (1-\sqrt[n]{a}\,T)_W \cdot (1-T^n)_W$$

$$(1-T^n)_W \cdot (1-T^m)_W$$

$$= ((1-T^l)^d)_W$$

$$= d\cdot((1-T^l)_W)$$

$n=m$のとき,

$$((1-T^n)_W)^2 = n(1-T^n)_W$$

もし $\frac{1}{n} \in \Lambda(A)$ ならば

$$\left(\frac{1}{n}(1-T^n)_W\right)^2 = \left(\frac{1}{n}(1-T^n)_W\right)$$

巾等元

exer. 10 A

A ring に対し
$f \in A$

$$A_f \underset{\mathrm{def}}{=} A[X]/(Xf-1)$$

$A \to A_f$ は単射とは限らない.

$(A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\ f = \bar{2}$ のときなど$)$