体論要約 NO.5

今日のテーマ: $\boxed{\text{共役}}$

共役は昔は共軛と書いた。したがって、この字は「きょうやく」と読むのが正しい。このへんの事情については wikipedia の共役の項にも記述が見られる。ネットも捨てたもんじゃない。

体 K 上の代数的数 α を付け加えてできた体 $K(\alpha)$ の構造は、実際には α の K 上の最小多項式 f_0 によって完全に決まるのであった。

定義 5.1. 体 K の拡大体 L から体 K の拡大体 L' への写像 φ が **中への** K**-同型**であるとは、φ が環準同型であって、なおかつ K 上で恒等写像に等しい時に言う。言い換えると、L から L' の中への K-同型とは環の準同型であって、同時に K-線形写像でもあるもののことである。さらに、中への K-同型 φ が全射であるとき、φ を単に K**-同型**と呼ぶ (このとき φ は必然的に全単射である) 。

命題 5.2. 体 K 上の拡大体 L の元 α, β が、いずれも K 上代数的であるとき、次のことは同値である。

(1) α, β の K 上の最小多項式が等しい。
(2) $K(\alpha)$ から $K(\beta)$ への K-同型 φ で、$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ を満たすものが存在する。
(3) $K[X]$ の任意の元 a, b に対して、

$$a(\alpha) = b(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad a(\beta) = b(\beta)$$

定義 5.3. 上の同値な条件のひとつ (ゆえに、全部) が成り立つとき、α, β は K 上**共役**であるという。

問題 5.1. $\alpha = \sqrt{2} + 3$ と $\beta = -\sqrt{2} + 3$ は $\mathbb{Q}$ 上共役ではあるが、$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 上共役ではないことを示しなさい。(本問では $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いて良いことにする。)

問題 5.2. 体 K の拡大体 L と、L の元 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ が与えられているとする。α_1 と β_1 とが K 上共役で、 α_2 と β_2 とが K 上共役ならば、$\alpha_1 + \alpha_2$ と $\beta_1 + \beta_2$ は K 上共役であると必ず言えるだろうか?