理工系線形代数学 NO.5 要約

今日のテーマ:**逆行列**

行の数と列の数が同じ行列のことを正方行列というのでした。

定義 5.1. n 次正方行列 A が与えられているとする。n 次正方行列 X が、

$$AX = 1_n = XA$$

をみたすとき、X のことを A の逆行列という。

命題 5.2. (1) 正方行列 A の逆行列は存在するとは限らない。
(2) A の逆行列が存在する場合には、A の逆行列はただひとつである。

定義 5.3. 行列 A の逆行列が存在するとき、A は正則行列であるといい、その逆行列のことを A^{-1} と書く。

◎ 2 次行列の逆行列

命題 5.4. *2* 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は、$ad - bc \neq 0$ である。

$ad - bc \neq 0$ のとき、$\Delta = ad - bc$ と書くと、A の逆行列は

$$\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

で与えられる。*(*前の $\frac{1}{\Delta}$ の部分も忘れてはならないが、後ろの部分は "主対角線は入れ替えて、あとはマイナス、マイナス" と覚えよう。*)*

二次行列に限らず、一般のサイズの正方行列 A が逆行列を持つならば、一次方程式

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

は A^{-1} を用いれば簡単に解けて、その一意的な解は

$$\mathbb{x} = A^{-1}\mathbb{b}$$

で与えられる。

逆行列をもとめるのは、一次方程式をたくさん解くのと同じことである:

命題 5.5. n 次正方行列 A が与えられたとする。$\mathbb{e}_1, \dots \mathbb{e}_n$ を基本ベクトルとする。このとき、

(1) n 個のベクトル $\mathbb{x}_1, \dots, \mathbb{x}_n$ がそれぞれ方程式

$$(\bigstar) \qquad A\mathbb{x}_1 = \mathbb{e}_1, \quad A\mathbb{x}_2 = \mathbb{e}_2, \quad A\mathbb{x}_3 = \mathbb{e}_3, \quad \dots, \quad A\mathbb{x}_n = \mathbb{e}_n$$

を満たしたとする。このとき、$X = [\mathbb{x}_1 \ \dots \ \mathbb{x}_n]$ は $AX = 1_n$ を満たす。

(2) 逆に、$AX = 1_n$ を満たす n 次正方行列 X が与えられれば、その列ベクトルは方程式 *(*★*)* を満たす。

この命題では $AX = 1_n$ のみに言及している。逆の積 XA がどうなるかについてはどうしてもちょっとした議論が必要になる。