

環論 NO.4 要約

今日のテーマ 剰余環

補題 4.1. R が単位元をもつ環であるとし、 I をそのイデアルとする。このとき、

- (1) R に同値関係 \sim が、次のようにして決まる。

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I.$$

- (2) R/\sim に、足し算を次のようにして入れる。

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \quad (? \text{ は } ? \text{ の } \sim \text{ に関するクラスを表す。})$$

この足し算はうまく定義されていて、 R/\sim はこの足し算について可換群になる。

- (3) R/\sim に、かけ算を次のようにして入れる。

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

このかけ算はうまく定義されていて、 R/\sim はこのかけ算について半群になる。

- (4) R/\sim は上で定義された足し算、かけざんに関し環をなす。しかも、この環は単位元 $\bar{1}$ を持つ。

定義 4.1. 上の補題の仮定のもとで、 R/\sim に上のような足し算、かけ算を入れて環にしたものを R/I と書き、 R の I による剰余環と呼ぶ。

例題 4.1. 17770430 を 9 で割った余りを求めよ。

(解答) 整数 n の $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ におけるクラス (剰余類) を \bar{n} と書くことにする。一般に、 $\overline{10} = \bar{1}$ であることに注意すると、

$$\overline{10^k} = \bar{1} \quad (k \in \mathbb{Z}_{>0})$$

という等式が成り立つことがわかる。これを用いると、

$$\begin{aligned} \overline{17770430} &= \overline{1 \times 10^7 + 7 \times 10^6 + 7 \times 10^5 + 7 \times 10^4} \\ &\quad + \overline{0 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 0} \\ &= \bar{1} \times \overline{10^7} + \bar{7} \times \overline{10^6} + \bar{7} \times \overline{10^5} + \bar{7} \times \overline{10^4} \\ &\quad + \bar{0} \times \overline{10^3} + \bar{4} \times \overline{10^2} + \bar{3} \times \overline{10^1} + \bar{0} \\ &= \bar{1} + \bar{7} + \bar{7} + \bar{7} + \bar{0} + \bar{4} + \bar{3} + \bar{0} \\ &= \overline{1 + 7 + 7 + 7 + 0 + 4 + 3 + 0} \\ &= \overline{29} = \overline{2 \times 10 + 9} = \overline{2 + 9} = \bar{2} \end{aligned}$$

を得る。

(答え) 2

(注意) 九去算は計算機のない時代に、計算の確かめの目的で使われた。現在でも、占い (バカラ占い) 等で名残を見かけることがある。

問題:

あなたの思い付いた 8 桁以上の数 (簡単すぎないもの) を x とします。このとき、 $x \times 314159265 + 1234567$ を 9 で割ったあまりを (計算機やコンピュータを使わずに) 求めなさい。 x 自身と、求め方も書くこと。なお、検算にコンピュータ等を使用するのは構わないし、むしろ推奨する。