

## 環論 NO.7 要約

**今日のテーマ** 《環の準同型定理》環  $R$  から  $S$  への準同型  $f$  が与えられたとき、写像に関する一般論から  $f$  による  $R$  のクラス分けができる。それは  $\text{Ker}(f)$  による  $R$  のクラス分けと一致する。

**定理 7.1.** 環準同型  $f: R \rightarrow S$  について、 $R$  の同値関係  $\sim_f$  を

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

で定義し、また  $r \in R$  の  $R/\text{Ker}(f)$  でのクラスを  $\bar{r}$  とすると、次のことが成り立つ。

(1)  $x, y \in R$  にたいして、

$$x \sim_f y \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$$

が成り立つ

(2)  $f$  は

$$\bar{f}: R/\text{Ker}(f) \ni \bar{r} \mapsto f(r) \in \text{Image}(f) \quad (r \in R)$$

なる同型を誘導する。

代数では群、加群、環、Lie 環など、いろいろなモノについてそれぞれ「準同型定理」がなりたつが、それはすべて次の単純な事実に基づく：

### 「値による分類」

写像  $f: X \rightarrow Y$  が与えられたとき、 $f$  の行き先でわけることによって  $X$  の元の分類(クラスわけ)ができる。

さらに、

### Kernel の重要性

$f$  が環の準同型の場合には、 $f$  の値による分類は「差が  $\text{Ker}(f)$  に入るかどうかの分類」と同じことである。

(環や加群の準同型では、「差」は  $a-b$  で決まるものであるが、群の場合には、 $ab^{-1}$  で与える。)

**問題 7.1.** 環準同型  $f: \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}$  が与えられていて、 $f(X) = 3$  だと分かっているとす。このとき、

- (1) 多項式  $X^2 + 3X + 5 \in \mathbb{Z}[X]$  の  $f$  による像を具体的に求めなさい。
- (2)  $\text{Ker}(f)$  の元で、 $0$  と異なるものを具体的に3つあげなさい。