

線形代数学 II NO.14

期末レポート問題

答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。※この稿は未定稿です。間違いがあるかもしれませんし、条件が足りない場合もあります。それを了承の上、自分の考えを記して下さい。

◎7/27 まで、(4)の問題の数値が間違えていました。現在ご覧のものは正しく直されています。すみません。ご確認下さい。

問題 14.1. p, q, r を複素数として、複素数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に関する漸化式

$$(\star) \quad a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を考える。3次方程式

$$(\text{固有}) \quad X^3 = pX^2 + qX + r$$

を (\star) の固有方程式と呼ぶことにする。いま、 (固有) が相異なる解

α, β, γ をもったと仮定する。さらに $A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。次の各

問いに答えよ。

(1) 初項 $a_0 = 1$ で、漸化式 (\star) を満たすような等比数列を3つ求めよ。

(2) 一般に数列 $\{a_n\}$ に対して、 $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

とおく。 $\{a_n\}$ が (\star) を満たすとき、非負の各整数 n に対して、 $\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n$ をみたすことを示しなさい。

(3) A を対角化せよ。(ヒント:(1)の結果をよく見て A の固有値と固有ベクトルを見い出せ。)

(4) $(p, q, r) = (2, 1, -2)$ のとき、漸化式 (\star) を初期条件 $(a_2, a_1, a_0) = (1, 1, 1)$ のもとで解け。