線形代数学 II NO.10 要約

今日のテーマ: **行列の三角化。Cayley-Hamilton の定理**

今回も引き続き、行列は複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。

定理 10.1. n 次正方行列 A は常に三角化可能である。すなわち、ある上半三角行列と相似である。

定義 10.2. $\mathbb{C}$ 係数の n-次正方行列 A と 一変数多項式 $f(x)$ に対して、$f(A)$ を次のように定義する:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

にたいして、

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E_n.$$

系 10.1 (定理 10.1 の系:Cayley-Hamilton)**.** 行列 A の固有多項式 f_A を考える。f_A に行列 A を代入したもの $f_A(A)$ は ゼロ行列に等しい。

定理 10.1 の証明には次のことを用いる。

補題 10.3. 正方行列 A_1, A_2 が相似、すなわちある正則行列 P が存在して $A_1 = PA_2P^{-1}$ であるとき、$f(A_1) = Pf(A_2)P^{-1}$.

補題 10.4. $n \times n$-行列 A が、$(n-1) \times (n-1)$-行列 B と定数 λ を用いて、$A = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ と表せているとき、

(1) $A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & * \\ 0 & B^n \end{pmatrix}$

(2) もっと一般に、任意の一変数多項式 $f(x)$ に対して、

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & * \\ 0 & f(B) \end{pmatrix}$$

注意 10.1. 基本ベクトル $\mathbb{e}_1$ を用いると、定理の仮定は基本的に

$$A\mathbb{e}_1 = \lambda \mathbb{e}_1$$

と同値である。

注意 10.2. 補題 10.4 は λ のところが数ではなく、行列であっても (つまり、ある $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ にたいして λ が (必ずしもスカラー行列でなくても良い) $k \times k$-行列、B が $(n-k) \times (n-k)$ 行列であっても) 同様に成り立つ。$V_1 = \mathbb{C}\mathbb{e}_1 + \mathbb{C}\mathbb{e}_2 + \cdots + \mathbb{C}\mathbb{e}_k$, $V_2 = \mathbb{C}\mathbb{e}_{k+1} + \mathbb{C}e_{k*2} + \cdots + \mathbb{C}\mathbb{e}_n$ と書くと、$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$ と直和分解され、上の補題はこの直和分解に関する行列 A の区分けを考えていることにあたる。