微分積分学概論要約 NO.1

本講義の目的：$\boxed{\text{極限と連続性の詳論}}$

高校までの数学が「料理を味わう勉強」とするなら、この講義での数学は「料理を作る勉強」である。とは言っても、「野菜を畑で作る」ところから始めると大変なので、ある程度は出来合いのものをもちいる。他方で、「レトルトを温めておしまい」では料理とはよべない。おなじように、高校で習った「中間値の定理」などの定理をここで手ばなしで使ってはいけない。指数関数、対数関数、三角関数等もアウトである。ではどこまで用いいて良いかといえば次のようになる。

> ◎この講義で用いて良いもの (材料):
> 整数、有理数、実数の、和、差、積、商、等号、**不等号**。
> ◎この講義で作るもの (料理):
> 極限、収束、連続の諸概念。中間値の定理などの連続関数に関する諸定理。

定義 1.1. 以下この講義では次のような記号を用いる。

(1) $\mathbb{Z}$：整数全体のなす集合。
(2) $\mathbb{Q}$：有理数全体のなす集合。
(3) $\mathbb{R}$：実数全体のなす集合。
(4) $\mathbb{C}$：複素数全体のなす集合。

◎集合と、その元との区別が大事。「実数の集合を一つ考える。」というのと、「実数を一つ考える。」というのをよく意識して区別すること。

定理 1.2. 次の不等式が成り立つ。

(1) $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $-|x| \le x \le |x|$.
(2) (三角不等式) $x, y \in \mathbb{R}$ に対して、$|x+y| \le |x| + |y|$.

定義 1.3. 実数 a, b について、閉区間 $[a, b]$ と開区間 (a, b) をつぎの式で定める。

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

$\boxed{\text{実数の集合の例、上限、上界}}$

◎ $[a, b]$ には端点があって、そこでのようすは $[a, b]$ のほかの点のようすと大きく異っている。それに対して、(a, b) の各点はどの点も似ている。

◎ $[a, b]$ には最大元があるが、(a, b) にはない。次の定義を見よ。

定義 1.4. $\mathbb{R}$ の部分集合 A が与えられているとする。 このとき

(1) $a \in \mathbb{R}$ が A の**上界** (upper bound) であるとは、

$$\forall x \in A (x \le a)$$

(つまり、どの $x \in A$ をもってきても $x \le a$) が成り立つときに言う。

(2) $a \in \mathbb{R}$ が A の**上限**(supremum) であるとは、A の上界のうち最小のものをいう。

◎ 集合の上界は存在するとは限らない。また、上界が存在したとすると、それはいくつもある。

例 1.5.

$$T = \{\text{ 土佐電鉄 (*) の運賃 }\} = \{120, 200, 220, 300, 400, 460\}$$

とおく ((*)2014/4/1 現在)。 このとき、

(1) T の上界としては、1000 がある。これは「土佐電鉄に乗るときは 1000 円あればひとり分のお金は足りる」ことを意味している。
(2) T の上界としては、他にも 500, 一万、十万、951.777.. 等がある。
(3) T の上限は 460 である。

旅行に行くとき、かかる旅費をキッチリ計算して、その分のお金しか持って行かない人は少なかろう。「大体△万円あれば十分」とか見積もる。これが上界の考え方。

例 1.6. (最大値を持たないが上限を持つ集合たち)
(1) $\{\frac{n-1}{n}; n = 1, 2, 3, \dots\}$ は上限 1 をもつ。
(2) $\{x \in \mathbb{R}; x < 2\}$ は上限 2 を持つ。
(3) $\{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\}$ は上限 $\sqrt{2}$ を持つ。

定義 1.7. 集合 $A \subset \mathbb{R}$ が**上に有界**であるとは、A が上界を少なくとも一つもつときに言う。

例題 1.8. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ とおく。このとき

$$S = \{x \in \mathbb{R}; f(x) < 0\}$$

は上界をもつだろうか、

(解答) $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ と因数分解できるので、

$$S = (0, 1) \cup (2, 3)$$

であることがわかる。したがって、 S は上界 10 をもち、上に有界である。

上界は一つ挙げれば十分である。上の例題なら 3 (上限) でも良いし、100 でもよい。f が因数分解できない場合も、つぎのような別解ならうまくいく。
(別解) まず、$M = 100$ とおくと、S の元 s は $s \leq M$ を満たす。なぜなら、もし $s > M$ なる $s \in S$ が存在したとすると、

$$\begin{aligned} f(s) = &\quad s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6\,s \\ &> 100s^3 - 6s^3 + 11 \cdot 0 - 6 \cdot s^3 = 88s^3 > 0 \end{aligned}$$

となって、これは $s \in S$ に反するからである。($s > 1$ のとき $s < s^2 < s^3 < \dots$ に注意。負の項は多めに見積もり、正の項は控えめに見積もる。) したがって、M は S の上界の一つである。

問題 1.1. 次の各問に答えなさい。
(1) $\{|x^3 - 10x^2 + 100x - 1000| \quad ; \quad x \in [0, 1]\}$ の上界を一つ挙げ、その理由を述べなさい。
(2)
$$S = \{x \in \mathbb{R}; 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 5 < 0\}$$
は上界をもつだろうか、もつ場合には上界を一つ挙げてその理由を説明し、もたない場合にはもたないことの理由を説明せよ。

次のことは、実数の極限を考える上で基本的である。

公理 1.9. $\mathbb{R}$ の部分集合 $S \neq \emptyset$ が上に有界ならば S は必ず上限をもつ。