微分積分学概論 AI 要約 NO.5

第 5 回目の主題：$\boxed{\text{単調数列}}$
次の公理は実数の基本的な性質であった。

公理 5.1. (再掲) $\mathbb{R}$ の部分集合 A が上に有界ならば、 A は上限を持つ。

定義 5.2. $\mathbb{R}$ の部分集合 A に対して、その上限のことを $\sup(A)$ と書く。

補題 5.3. 集合 A の上限が α であることは、次の二条件が同時に成り立つことと同値である。

(1) $\forall x \in A \quad (x \leq \alpha)$.
(2) $\forall \epsilon > 0 \exists x \in A (x > \alpha - \epsilon)$.

数列 $\{a_n\}$ を単なる集合と見てそれが有界かどうか、やその上限 $\{a_n\}$ を議論することができる。公理 5.1 により、上に有界な数列は上限を持つことがわかる。

定義 5.4. 実数列 $\{a_n\}$ が**単調増加**であるとは、

$$\forall n \forall m (n \geq m \implies a_n \geq a_m)$$

がなりたつときにいう。

もっと露骨に言えば $\{a_n\}$ が単調増加であるとは

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \ldots$$

が成り立つということである。

補題 5.5. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

で定義する。このとき

(1) $\{a_n\}$ は単調増加である。
(2) $\{a_n\}$ は有界である。

定義 5.6. 上限

$$\sup \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

のことを**自然対数の底**とよび、e と書く。(注意:この定義は教科書のものとは少し異なる。が、結局は同じ値のものであることが後に証明できる。)

定理 5.7. 上に有界な単調増加数列はその上限に収束する。

問題 5.1.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}$$

で定義される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示しなさい。
ヒント: $k > 1$ に対して、

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

に注意。

<table>
<tr><td>A</td><td>α</td><td>alpha</td><td>アルファ</td><td rowspan="24">ギリシャ文字の表。

● 左から順に、大文字、小文字、英語での読み、日本語での読み方を書いた。(ただし、「日本語での読み方」はだいたいの目安に過ぎない。)

● A, B, E など、通常のアルファベットと同じに見える文字は、ふつうは数学では用いられない。

● 逆に、同じ読みでも二つ以上の文字がある場合、数学では二つを区別し、それぞれ別の意味で用いることがある。</td></tr>
<tr><td>B</td><td>β</td><td>beta</td><td>ベータ</td></tr>
<tr><td>Γ</td><td>γ</td><td>gamma</td><td>ガンマ</td></tr>
<tr><td>Δ</td><td>δ</td><td>delta</td><td>デルタ</td></tr>
<tr><td>E</td><td>ϵ, ε</td><td>epsilon</td><td>イプシロン</td></tr>
<tr><td>Z</td><td>ζ</td><td>zeta</td><td>ゼータ</td></tr>
<tr><td>H</td><td>η</td><td>eta</td><td>エータ</td></tr>
<tr><td>Θ</td><td>θ, ϑ</td><td>theta</td><td>シータ</td></tr>
<tr><td>I</td><td>ι</td><td>iota</td><td>イオタ</td></tr>
<tr><td>K</td><td>κ</td><td>kappa</td><td>カッパ</td></tr>
<tr><td>Λ</td><td>λ</td><td>lambda</td><td>ラムダ</td></tr>
<tr><td>M</td><td>μ</td><td>mu</td><td>ミュー</td></tr>
<tr><td>N</td><td>ν</td><td>nu</td><td>ニュー</td></tr>
<tr><td>Ξ</td><td>ξ</td><td>xi</td><td>グザイ</td></tr>
<tr><td>O</td><td>o</td><td>omicron</td><td>オミクロン</td></tr>
<tr><td>Π</td><td>π, ϖ</td><td>pi</td><td>パイ</td></tr>
<tr><td>P</td><td>ρ, ϱ</td><td>rho</td><td>ロー</td></tr>
<tr><td>Σ</td><td>σ, ς</td><td>sigma</td><td>シグマ</td></tr>
<tr><td>T</td><td>τ</td><td>tau</td><td>タウ</td></tr>
<tr><td>Υ</td><td>υ</td><td>upsilon</td><td>ウプシロン</td></tr>
<tr><td>Φ</td><td>ϕ, φ</td><td>phi</td><td>ファイ</td></tr>
<tr><td>X</td><td>χ</td><td>chi</td><td>カイ</td></tr>
<tr><td>Ψ</td><td>ψ</td><td>psi</td><td>プサイ</td></tr>
<tr><td>Ω</td><td>ω</td><td>omega</td><td>オメガ</td></tr>
</table>