微分積分学概論 AI 要約 NO.13

指数関数・対数関数

定理 13.1. 正の数 a にたいして、

$$\mathbb{Q} \ni q \mapsto a^q \in \mathbb{R}$$

は $\mathbb{R}$ 上の連続関数に拡張されて $a > 1$ ならば単調増加、$a < 1$ ならば単調減少、$a = 1$ なら定数関数になる。$x \in \mathbb{R}$ におけるこの関数の値を a^x と書く。

Proof. $x \in \mathbb{R}$ にたいして、x に収束する有理数列 $\{q_j\}$ をとり、$\{a^{q_j}\}$ を考えると、これはコーシー列であることがわかる。ゆえに、この列はある実数に収束する。じつはこの実数は x の近似列 $\{q_j\}$ の取り方によらないことがわかるから、これを a^x と書いて差し支えない。容易に分かるように $x \mapsto a^x$ は単調である。$x \to a^x$ が連続であることは問題 12.1 の解答 (次ページ参照) と同様の方法により分かる。

□

$\exp(r)$ の定義を思い出しておこう。

$$\exp(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} r^k$$

これは次のものと等しいことが、教科書の方法により分かる。

$$\lim_{n\to\infty} (1 + r/n)^n$$

アイディアとしては

$$\lim_{n\to\infty}(1+r/n)^n = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}r^k n^k) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!}r^k)$$

とやって「被圧収束定理」を使うことになるが、そんなことわかってたら 1 年生じゃない！)

とくに、 $e = \exp(1)$ とおくと、

$$\exp(r) = e^r$$

定義 13.2. 指数関数 $\exp(x)$ の逆関数を $\log(x)$ で書き、x の自然対数とよぶ。

逆関数の定理により、$\log(x)$ は x の単調増加連続関数であることがわかる。
数学では断らない限り対数の底としては e をとり、自然対数を考えるのが普通である。

補題 13.3. $a^x = e^{x\log(a)}$.

定理 13.4. 次のことがなりたつ。

(1) $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.
(2) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.
(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$. ($\log(x)$ **の微分の基本になる式**)
(4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$. ($e^x$ **の微分の基本になる式**)

上の定理は e^x の $x \to 0$ の挙動を記述するものだが、$x \to \infty$ のときの挙動も大事である。

補題 13.5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$$

例題 13.6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x} = 0$$

を証明せよ。