質問から

1. 正項級数

$\{a_i\}$ を $a_i \geq 0$ な数列とする。このとき、

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

と置くと、 s_n は正値、(広義) 単調増加な数列である。(以下、この稿では「広義単調増加」 のことを単に「単調増加」と呼ぶことにする。)

このような $\{s_n\}$ の「極限」(形式的な無限和) を正項級数と呼ぶのであった。

言い換えると、$\{s_n\}$ を考えることは、正値単調増加数列を考えるのと同じである。

命題 1.1. 単調増加数列 $A = \{s_n\}$ が有界ならば A の上限 m は存在し、$\lim_{n\to\infty} s_n = m$.

$\forall\epsilon > 0$ に対して、 $m - \epsilon$ は m より小であるから、$m - \epsilon$ は A の上界たりえない。すなわち $\exists N$ such that $s_N > m - \epsilon$. $\{s_k\}$ は単調増加であるから、$\forall n > N$ にたいして、

$$m - \epsilon < s_N \leq s_n \leq m$$

(最後の不等号は m が A の上界の一つだからである。) 結局、$\forall n > N$ にたいして、$|s_n - m| < \epsilon$ が分かるが、これは $s_n \to m$ を意味する。

収束する数列は有界である。(教科書§2 定理1 (2)) したがって、cym07.pdf の (1) が成り立つことが分かる。