

## ZORN の補題

このページは Wikipedia の Zorn の補題の項 (2017/10/25 閲覧) のコピペを、若干記号等を好みに応じて変更したものである。

**定理 0.1.** 順序集合  $S$  があるとする。もし  $S$  の任意の鎖が  $S$  内に上界を持つとすると、 $S$  は極大元を持つ。

Zorn の補題を使って、次のことを示せる:

**補題 0.2.** 環  $R$  とそのイデアル  $I_0$  で、 $R \supsetneq I_0$  を満たすものがあつたとする。このとき、 $I_0$  を含む  $R$  の極大イデアルが存在する。とくに、 $\{0\}$  でない環  $R$  は極大イデアルを持つ。

**証明.** Zorn の補題で

$$S = \{I_0 \text{ を含む } R \text{ の (両側) イデアルのうち } R \text{ 自身以外からなるもの}\}$$

を考える。 $S$  は  $I_0$  を含むので空ではない。 $S$  は包含関係により半順序集合である。 $R$  の極大イデアルを見つけることは  $S$  の極大元を見つけることと同じである。

Zorn の補題を適用するために、 $S$  の空でない全順序部分集合  $T$  をとる。 $T$  に上界が存在することを示す必要がある。つまり、イデアル  $I \subset R$  が存在して、それは  $T$  のどの要素より以上であり、しかも  $R$  よりは厳密に小さいことを示す必要がある。 $I$  を  $T$  の全てのイデアルの和集合とする。 $T$  は少なくともひとつ元を持ち、それは  $I_0$  を含んでいるので、和集合  $I$  も  $I_0$  を含み、とくに空集合ではない。 $I$  がイデアルであることを示すため、 $a$  と  $b$  を  $I$  の元とすると、ふたつのイデアル  $J, K \in T$  が存在し、 $a \in J$  であり、 $b \in K$  ある。 $T$  は全順序であつたので、 $J \subset K$  または  $K \subset J$  である。前者の場合は、 $a$  も  $b$  もともに  $K$  の元であり、和  $a+b$  も  $K$  の元である。よって、 $a+b$  は  $I$  の元である。後者の場合は、 $a$  も  $b$  もともに  $J$  の元であるから、同様に  $a+b$  は  $I$  の元である。さらに、任意の  $r \in R$  に対して、 $ar$  と  $ra$  は  $J$  の元であるから、 $I$  の元でもある。以上により、 $I$  は  $R$  のイデアルであることが分かつた。

そして、イデアルが  $R$  と一致することは  $1$  を含むことと同値である。そこで、 $I$  が  $R$  に等しいと仮定すると、それは  $1$  を含み、 $T$  のある要素が  $1$  を含むことになり、それは  $R$  と一致する。しかし、これは  $S$  から  $R$  を除いていたことに矛盾する。

Zorn の補題の条件は確認できたので、 $S$  には極大元が存在する。言い換えると、 $R$  には極大イデアルが存在する。□

上のように、Zorn の補題の適用時には、ある一つの集合の部分集合の全体あるいは一部 (この場合は全体とは異なるイデアル) を使用することも多い。

Zorn の補題の証明の概略。

Zorn の補題

順序集合  $S$  があるとする。もし  $S$  の任意の鎖が  $S$  内に上界を持つとすると、 $S$  は極大元を持つ。もっと強く、 $S$  の任意の元  $s_0$  に対して、 $m \geq s_0$  を満たすような  $S$  の極大元  $m$  が存在する。

以下では  $s_0 \in S$  を固定し、補題の後半部分を証明する。

$$A = \{s_0 \text{ を元として含むような } S \text{ の鎖}\}$$

とおく。 $A$  は包含関係に関して順序集合をなす。

- (1)  $A \ni \{s_0\}$  よって  $A$  は空ではない。
- (2)  $A$  の任意の鎖  $T$  は上限 (=最小上界) を持つ。

さて、 $A$  の任意の元  $T$  をとってくる。 $T$  は  $S$  の鎖であるから、仮定により  $S$  内に上界  $a_T$  を持つ。 $a_T$  が  $S$  の極大元ならば話は終わりであるから、 $a_T$  は極大ではないとしてよい。したがって、ある  $b_T \in S$  が存在して、 $b_T$  は  $T$  のどの元よりも大きい。そこで、おのこの  $T \in A$  に対してそのような  $b_T$  を選び、写像  $f: A \rightarrow A$  を

$$f(T) = T \cup \{b_T\}$$

で定義する。

- (3)  $f$  は  $A$  から  $A$  への増加写像である。
- 今の場合、 $f$  は狭義増加写像であるから、次の Bourbaki の補題に反する。

Bourbaki の補題

順序集合  $A$  があるとする。もし

- (1)  $A \ni \exists a_0$ .
- (2)  $A$  の任意の鎖  $T$  は上限 (=最小上界) を持つ。(これを以下では  $\sup(T)$  と書くことにする。)
- (3)  $A$  から  $A$  への増加写像  $f$  が存在する

とすると、ある  $x_0 \in A$  が存在して、 $x_0 \geq a_0$  かつ  $f(x_0) = x_0$  である。

Bourbaki の補題の証明の概略。

$M \subset A$  が  $f$ -認容であるというのを

- (1)  $f(M) \subset M$
- (2)  $M$  の任意の鎖  $T$  に対して、 $\sup(T) \in M$

で定義する。

$M = \langle a_0 \rangle$  を、「 $a_0$  をふくむ  $f$ -認容な  $A$  の部分集合のうち最小のもの」として定義する。 $M$  は  $a_0$  を含む  $f$ -認容な  $A$  の部分集合の全体の共通部分であり、「 $f, \sup$  を作用として  $a_0$  で生成されたような集合」と思っても差し支えない。この証明の核心はつぎのことである。

証明の核心

$\langle a_0 \rangle = M$  自身も全順序集合 (つまり、鎖) である。

これがわかると、 $M$  自体が上限  $m_0$  をもち、 $M$  の  $f$ -認容性から  $m_0 \in M$  である。 $f$  の増加性から  $f(m_0) = m_0$  すなわち Bourbaki の補題の  $x_0$  としては  $m_0 = \sup(\langle a_0 \rangle)$  を取れば良いことがわかるという寸法である。

では「核心」の証明はというと、以下 CM ... じゃなくて次ページ。

- (1)  $M \ni c$  が extreme  $\Leftrightarrow \forall x \in M (x < c \implies f(x) \leq c)$  で、「extreme な元」を定義する。
- (2) extreme な元  $c$  に対して、 $M_c = \{x \in M; |x \leq c \text{ or } f(c) \leq x\}$  と定義すると、 $M_c$  自身も  $f$ -認容なことがわかり、したがって  $M = M_c$ .
- (3)  $M_{\text{extreme}} = \{c \in M | c \text{ は extreme}\}$  と定義すると、これもまたもや  $f$ -認容であることがわかって、 $M = M_{\text{extreme}}$
- (4) (3) のことから、直ちに  $M$  は全順序集合であることがわかる。

という具合。詳しくは成書をご覧いただきたい。

この稿では

S. Lang Real and functional analysis third edition (GTM)  
を参考にした。