理工系線形代数学 NO.10 要約

今日のテーマ: **ベクトル (2)**

定義 10.1. ベクトル空間の元 $\mathbb{v}_1,\ \mathbb{v}_2,\ \ldots,\ \mathbb{v}_n$ が一次従属であるとは、非自明な 1 次の関係式

$$c_1\mathbb{v}_1 + c_2\mathbb{v}_2 + \cdots +, c_n\mathbb{v}_n = 0 \qquad (c_1, c_2, \ldots c_n \in \mathbb{R})$$

を満たすときにいう。$\mathbb{v}_1,\ \mathbb{v}_2,\ \ldots,\ \mathbb{v}_n$ が一次従属でない時、一次独立であるという。

定義 10.2. ベクトル空間 V の元 $\mathbb{v}_1,\ \mathbb{v}_2,\ \ldots,\ \mathbb{v}_n$ が V の基底であるとは、次の 2 つのことが成り立つときにいう。

(1) V の任意の元は $\mathbb{v}_1,\ \mathbb{v}_2,\ \ldots,\ \mathbb{v}_n$ の線型結合で書ける。
(2) $\mathbb{v}_1,\ \mathbb{v}_2,\ \ldots,\ \mathbb{v}_n$ は一次独立である。

n 個の元からなる基底が存在するようなベクトル空間を n 次元ベクトル空間という。

n 次元ベクトル空間 V をとろう。定義により V には n 個の元からなる基底 $\mathbb{v}_1,\ \mathbb{v}_2,\ \ldots,\ \mathbb{v}_n$ が存在する。V の元 $\mathbb{x}$ は $c_1\mathbb{v}_1 + c_2\mathbb{v}_2 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n$ と書くことができる。$\mathbb{x}$ に数ベクトル $[c_1, \ldots, c_n]$ を対応させることで、V を具体的な空間 $\mathbb{R}^n$ と同一視できる。

補題 10.3. *n 次元計量ベクトル空間 V については、次のような基底が存在する。(正規直交基底)*

$$v_i \cdot v_j = \delta_{ij} \quad (\text{クロネッカーのデルタ})$$

この基底を採用すると、ベクトルの内積は数ベクトルの標準内積に対応する。

一般の n 次元ベクトル空間 V	$\mathbb{R}^n$
基底 $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$	基本ベクトル $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n$
$\mathbb{v} = \sum_{i=1}^n c_n\mathbb{u}_i$	$[c_1, c_2, \ldots, c_n]$
内積	$[c_1, c_2, \ldots, c_n] \cdot [c'_1, \ldots, c'_n] = \sum_{i=1}^n c_i c'_i$

(3次元) 空間のベクトル

3次元空間の直線の表現法。$\{t\mathbb{v}+\mathbb{w}; t\in\mathbb{R}\}$
成分で書く方法もある。

$$\frac{x-w_1}{v_1}=\frac{y-w_2}{v_2}=\frac{z-w_3}{v_3}.$$

3次元空間の平面の表現法。$\{t\mathbb{a}+u\mathbb{b}+\mathbb{w}; t,u\in\mathbb{R}\}$
成分で書く方法もある。

$$c_1(x-w_1)+c_2(y-w_2)+c_3(z-w_3)=0.$$

内積でかく手もある。

2次元平面での直線の書き方も上に準ずるのであった。

三次元計量ベクトル空間には「外積」という概念もある。分野によっては大事であるのでここで定義を押さえておこう。

定義 10.4. 3次元計量ベクトル空間 V には次のような性質をもつ「外積」が存在する。

(1) 双線形性 (2重線形性)
(2) 反対称 (交代的) $\mathbb{a}\times\mathbb{b}=-\mathbb{b}\times\mathbb{a}$
(3) $\mathbb{a}\times\mathbb{b}$ は $\mathbb{a}$ や $\mathbb{b}$ と直交し、長さは2つのベクトルのつくる平行四辺形の面積である。
(4) (向き付けとの関係) 向き付との関係は大事であるが、(xyz座標系をどのように描くかなど) 使用する時々によって若干違ってくる。ここでは、標準となる正規直交系 $\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2,\mathbb{e}_3$ がすでに決まっていて、 $\mathbb{e}_1\times\mathbb{e}_2=\mathbb{e}_3$ を満たしている、という形で述べるにとどめておく。