

## 環論 問題 NO.15

出席番号、名前： \_\_\_\_\_

**問題 15.1.**  $f(X) = X^3 - 2$  とおく。  $R = \mathbb{Q}[X]/(f)$  において、  $X$  の剰余類 (クラス) を  $a$  とおく。このとき、

- (1)  $a$  の  $\mathbb{Q}$  係数多項式は必ず  $a$  の  $\mathbb{Q}$  係数の 2 次以下の多項式で表せることを、「割り算」「商」、「余り」という語句を使って証明し、具体的に

$$a^{10} - 5a$$

を  $a$  の有理係数の 2 次以下の式で表しなさい。

- (2)  $f$  が  $\mathbb{Q}$  上既約であることを既知として、 $a$  の  $\mathbb{Q}$  係数有理式は必ず  $a$  の  $\mathbb{Q}$  係数の 2 次以下の多項式で表せることを、前小問と、「互除法」という語句を使って証明し、具体的に

$$\frac{a^2}{1-a}$$

を  $a$  の有理係数の 2 次以下の式で表しなさい。

**問題 15.2.** (1) 可換環としての準同型  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  は存在しないことを証明せよ。

- (2) 可換環としての準同型  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  は存在しないことを証明せよ。