

微分積分学概論 AI 要約 NO.11

連続関数の性質

定理 11.1. (中間値の定理) (再) 関数 f が閉区間 $[a, b]$ で連続 (すなわち、 $[a, b]$ の各点で連続) とする。このとき $f(a)$ と $f(b)$ の中間の値 γ にたいして、 $f(c) = \gamma$ をみたすような $c \in [a, b]$ が存在する。

定理 11.2 (最大値の定理). 有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数は必ず最大値を持つ。

この定理は位相空間論においては「コンパクト集合の連続写像による像はコンパクトである」という定理 (あるいはその系の「コンパクト集合上の連続関数は最大値を持つ」という定理) に一般化される。

問題 11.1. 閉区間 $[0, 1]$ 上で定義された実数値連続関数 $f(x)$ が、任意の $x \in [0, 1]$ において $f(x) \neq 0$ を満たしたとする。このとき、ある $\epsilon_0 > 0$ が存在して、

$$\forall x \in [0, 1] \text{ にたいして } |f(x)| > \epsilon_0$$

を満たすことを証明しなさい。