

微分積分学概論やってみよう問題 NO.05 補足

出席番号、名前： _____

(3) 高校でならった知識を使って、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_{t=1}^n \frac{dt}{t^2}$$

をしめせ。

訂正: 6/11 以前の問題は間違っていました。すみません。お詫びにこの部分の解答を載せておきます。

まず 2 以上の整数 k について考える。 $t \in [k-1, k]$ において、

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

であるから、

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt.$$

このことと、 $k=1$ の部分をそのままにすることにして考えを合わせると

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt = 1 + \int_1^n \frac{1}{t^2} dt.$$