微分積分学概論やってみよう問題 NO.11

出席番号、名前：____________________

問題 11.1. 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 f は最大値をもつこと (最大値の定理) を証明しよう。

$M = \sup_{x\in[0,1]} f(x)$ と置く。ここでは f が有界であること、すなわち $M < \infty$ を仮定して証明することにする。[f が有界でないかもしれない場合にどうするかは、本問の議論と同様なことを繰り返すこともできるし、そのような二度手間を減らすための いくつかの手段も知られているが、ここでは割愛する。]

以下、問題にしている閉区間を半分に切って、$\sup_{x\in I_n} f(x) = M$ となる区間を取り出すことを繰り返す。次の各問に答えなさい。

(1) 区間の列 $I_0 = [0,1] \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ で、

$$|I_n| = 2^{-n}, \quad \sup_{x\in I_n} f(x) = M$$

を満たすものが存在することを示しなさい。

(2) 各正整数 n に対して、$\exists Q_n \in I_n$ で $M - 1/n < f(Q_n) \le M$ を満たすものが存在することを示しなさい。。

(3) $\mathbb{Q}_n$ は収束し、 $\lim_{n\to\infty} f(Q_n) = M$ であることを示しなさい。

(4) f は $[0,1]$ で最大値をもつことを示しなさい。:

問題 11.0.1. 一行感想を述べてください。

答:

答えは下の線より下にかくこと。多い場合は裏にまわっても良い。