# 任意の体 $K$ に対して $K$ を含む代数的閉体が存在する。(2)

「任意の体 $K$ に対して $K$ を含む代数的閉体が存在する。」(無印だが、以下では便宜上「(1)」と呼ぶことにする) において、次の「主張 2」に言及した。

**主張 2**

体 $K$ とその拡大体 $L$ が、次の性質を満たしたとする。

**(※)**

$K$ 上の任意の既約一変数モニック多項式 $p$ にたいして、その少なくとも一つの根が $L$ 内に存在する。

このとき、
$$M = \{x \in L;\ x \text{ は } K \text{ 上代数的}\}$$
とおけば、$M$ は $K$ を含む代数閉体である。

今回は、分離性の知識を用いて、次のこと (主張 2s) を証明する。(議論をいくらか簡潔にするため、全体は大きな代数的閉体 $\Omega$ に埋め込まれていると考えることにする。$\Omega$ としては (1) ですでに証明した $K$ の代数的閉包 (議論としてはそれで十分なことを確認できるが、それで物足りなければ $L$ の代数的閉包) を用いてもよい。)

**主張 2s**

$K$ とその拡大体 $L$ が、主張 2 の性質 (※) を満たしたとする。このとき、
$$L_s = \{x \in L;\ x \text{ は } K \text{ 上分離代数的}\}$$
とおけば、$L_s$ は $K$ 上分離代数的な ($\Omega$ の) 元をすべて含む。つまり、$L_s$ は $K$ の分離閉包である。

$K$ の標数が 0 なら、分離性の仮定は常に満足されるから、そのときには主張 2 も正しいことがわかる。

[主張 2s の証明]

$K$ 上分離代数的な元 $\alpha$ をとる。$\alpha$ の最小多項式を $f$ と書き、$f$ の根を $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ と置くと、$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ は $\alpha$ の $K$ 上の共役の全体と等しく、$M = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ は $K$ の有限個の分離的な元による拡大であるから、$K$ の単純拡大である (No.6, 系 6.9)。すなわち、 ある $\theta$ が存在して、 $M = K(\theta)$.

$\theta$ の 最小多項式 $g$ は仮定 (※) により少なくとも一つの根 $\theta_1$ を $L$ にもつ. 「ガロア理論の第一歩」により、
$$K(\theta_1) \cong K(\theta).$$
$f$ は $K(\theta)$ 上一次式の積に分解されるから、$K(\theta_1)$ でもそうである。つまり、$f$ の根 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ はすべて $M$ に属する。 $\square$