理工系線形代数学 NO.8 要約

今日のテーマ : **行列式 (3) 余因子行列と逆行列**

命題 8.1. (クラーメルの公式). 任意の n 次正方行列 A を $A = [\ \mathbb{a}_1 \quad \mathbb{a}_2 \dots \quad \mathbb{a}_n]$ とブロック分割する。A の行列式 $\det(A)$ を、以下では Δ と書くことにする。いま、 n 次元縦ベクトル $\mathbb{x}$ を

$$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

で与える。このとき、$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ ならば、

$$\det(A_{\leqslant}|_i \mathbb{b}) = x_i \cdot \Delta$$

とくに、

(1) $\mathbb{b}$ がはじめに与えられて、$\Delta = \det(A) \neq 0$ ならば、$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解は

$$x_i = \frac{\det(A_{\leqslant}|_i \mathbb{b})}{\Delta} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

で定まる成分を持つ縦ベクトルである。

(2) $k = 1, 2, \dots, n$ にたいして、

$$\mathbb{x}_k = \begin{bmatrix} \det(A_{\leqslant}|_1 \mathbb{e}_k) \\ \det(A_{\leqslant}|_2 \mathbb{e}_k) \\ \vdots \\ \det(A_{\leqslant}|_n \mathbb{e}_k) \end{bmatrix}$$

とおく。($\mathbb{e}_k$ は k 番目の基本ベクトル)。すると、$A\mathbb{x}_k = \Delta \cdot \mathbb{e}_k$ である。

(3) (2) の $\mathbb{x}_k$ をならべて

$$A[\mathbb{x}_1 \mathbb{x}_2 \dots \mathbb{x}_n] = \Delta \cdot E_n$$

を得る。

(4) (2) の $\mathbb{x}_k$ にたいして、$[\mathbb{x}_1 \mathbb{x}_2 \dots \mathbb{x}_n]$ は A の余因子行列と等しい。

行列の逆行列の行列式による表示、クラーメルの公式は、計算量的にはいまいちである。が、次のような利点がある。(クラーメルの公式でも同じなので逆行列についてのみ述べる。)

(1) A の逆行列は $\det(A) \neq 0$ である限り A について連続的に動く。

(2) A の逆行列の各成分は、A の成分の和、差、積を適当にとったあと、$\det(A)$ で割ることで得られる。(それ以外の演算は必要ない)

命題 8.2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が任意の $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して成り立つ。