# 理工系線形代数学 練習問題 NO.13

**問題 13.1.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

とおく。$A$ を $V = \mathbb{R}^3$ から $W = \mathbb{R}^4$ への線型写像と同一視する。このとき、

(1) $A$ を行基本変形して、階段行列 (仮に $B$ とおく) にせよ。
(2) $E_4$ に上と全く同じ行基本変形をして、得られた行列を $Q$ とおく。$QA$ を求めよ。
(3) $\mathrm{Ker}(A)$ を求めよ。
(4) $\mathrm{Image}(A)$ を求めよ。
(5) この場合の次元等式 $\dim V - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Image}(A))$ を具体的な数字を入れて完成せよ。

(略解)
(1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} (\text{そのまま}) \\ +(-4) \times (\text{ 一行目}) \\ +(-7) \times (\text{ 一行目}) \\ +(-10) \times (\text{ 一行目}) \end{matrix}$$

$$\to A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -9 & -18 \end{bmatrix} \begin{matrix} (\text{そのまま}) \\ \times(-1/3) \\ (\text{そのまま}) \\ (\text{そのまま}) \end{matrix}$$

$$\to A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -9 & -18 \end{bmatrix} \begin{matrix} (\text{そのまま}) \\ (\text{そのまま}) \\ +6 \times (\text{ 2 行目}) \\ +9 \times (\text{ 2 行目}) \end{matrix}$$

$$\to A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = Q_1 A$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_1 = Q_2 A_1$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_2 = Q_3 A_2$$

(2)

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (\text{そのまま}) \\ +(-4) \times (\text{一行目}) \\ +(-7) \times (\text{一行目}) \\ +(-10) \times (\text{一行目}) \end{array}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (\text{そのまま}) \\ \times(-1/3) \\ (\text{そのまま}) \\ (\text{そのまま}) \end{array}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (\text{そのまま}) \\ (\text{そのまま}) \\ +6 \times (\text{2 行目}) \\ +9 \times (\text{2 行目}) \end{array}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q$$

上の計算に出てくる各行列が何であるか考えると (←問題)

$$Q = Q_3 Q_2 Q_1$$

$$QA = B$$

(3)

$$\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbb{v} \in \mathbb{R}^3; A\mathbb{v} = 0\} = \{\mathbb{v} \in \mathbb{R}^3; QA\mathbb{v} = 0\} = \mathrm{Ker}(B)$$

$$\mathrm{Ker}(B) = \{\mathbb{v} \in \mathbb{R}^3; B\mathbb{v} = 0\} = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}; v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \text{ and } v_2 + 2v_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} v_3 \\ -2v_3 \\ v_3 \end{bmatrix}; v_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

つまり、 $\mathrm{Ker}(A)$ は $[1, -2, 1]$ の定数倍からなる一次元のベクトル空間である。これは $A$ の列ベクトルに次のような一次の関係式があることを示している。

$$1.\mathbb{w}_1 - 2.\mathbb{w}_1 + 1.\mathbb{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} - 2. \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix} + 1. \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} = 0.$$

(4)

$$\mathrm{Image}(A) = \{A\mathbb{v}; \mathbb{v} \in V\} = \{\mathbb{w}_1.v_1 + \mathbb{w}_2.v_2 + \mathbb{w}_3.v_3; v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}\}$$

で、これでもよいのであるが、実際には $\{\mathbb{w}_1, \mathbb{w}_2, \mathbb{w}_3\}$ は関係式がある (一次独立ではない) ので、その分減らすことができて、

$$\mathrm{Image}(A) = \{A\mathbb{v}; \mathbb{v} \in V\} = \{\mathbb{w}_1.v_1 + \mathbb{w}_2.v_2; v_1, v_2, \in \mathbb{R}\}.$$

(5) $A$ の列ベクトルの数 $(\dim(V))$ のうち、核で潰れる分 $(\dim(\mathrm{Ker}(A)))$ を差し引いたものが像の次元 $(\dim(\mathrm{Image}(A)))$ であるから、

$$\begin{array}{cccc} \dim V - & \dim\ (\mathrm{Ker}(A)) & = & \dim(\mathrm{Image}(A)) \\ 3 - & 1 & = & 2 \end{array}$$

これが (この問題の場合の) 次元定理である。