環論 NO.5 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 《剰余環、素イデアル、極大イデアル》

前回までに、環 R の、そのイデアル I による剰余環について解説した。

$$\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x - y \in I$$

なる判定法 (定義) により R にクラス分けが入ること、R/I に加法、乗法が代表元のとり方によらずに定まることがポイントであった。たとえば $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ において、

$$\overline{153} \times \overline{493}$$

を計算するのに、$\overline{153 \times 493}$ を計算してもよいが、$\overline{153} = \overline{-1}, \overline{493} = \overline{-2}$ と代表元を取り換えてから $\overline{-1} \times \overline{-2}$ とやっても良いわけである。

....

次のことにも注意しておこう。

一般に、R/I とは環 R に I の各元 x に応じた関係式 $x = 0$ を新たに導入しててきた環であるということが結果的にわかる。例えば:

- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ は、$\mathbb{Z}$ に新たな関係式 $6 = 0$ を導入してできた環である。
- $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)$ は、$\mathbb{Q}[X]$ に新たな関係式 $X^2 - 2 = 0$ を導入してできた環である。
- $\mathbb{Q}[X, Y]/(X^2 - 2, XY)$ は、$\mathbb{Q}[X, Y]$ に新たな関係式 $X^2 - 2 = 0, XY = 0$ を導入してできた環である。

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のような剰余環の性質は、いままで知っていた数のものとは若干異なる。そのことを説明するために、いくつかの言葉を用意しておく。

定義 5.1. 可換環 R の元 x が R の**零因子**であるとは、$xy = 0$ かつ $y \neq 0$ をみたす R の元 y が存在するときに言う。

定義 5.2. 可換環 R があたえられたとする。

(1) R に 0 以外の零因子がないなら、 R は**整域**であるという。
(2) R の 0 以外の元が R で可逆であるとき、R は**体**であるという。

もちろん、体は必ず整域である。

定義 5.3. 可換環 R のイデアル I $(R \neq I)$ について、

(1) R/I が整域であるとき、I は R の素イデアルであるという。
(2) R/I が体であるとき、I は R の極大イデアルであるという。

これらの名前の由来についてや、さしあたって重要な次の例についての証明などの詳しいことについてはもっとあとのほうの講義で述べる。

例 5.1.

(1) $\mathbb{Z}$ のイデアル $\{0\}$ は $\mathbb{Z}$ の素イデアルであるが、極大イデアルではない。
(2) 素数 p があたえられたとき、 $\mathbb{Z}$ のイデアル $p\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の極大イデアルである。
(3) 正の整数 n が素数でないとき、$n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアルではあるが、素イデアルではない。

定義 5.4. 素数 p が与えられたとき、$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は (上の例に述べたように) 元の数が p の体である。この体を $\mathbb{F}_p$ と書く。