線形代数学 II 期末試験的なレポート問題

- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。
- 本稿は現在暫定版です。間違いがある場合などに予告なしに変更される可能性があります。
- 2023/7/4 17:00 ごろ赤書き部分を追加しました。(それ以前は "A=" がなかった)
- 2023/7/4 18:00 ごろ (1) の赤書き部分を訂正。(それ以前は 2 になっていた。現在は 3)
- なお、カラープリンタを用いて無理に対応する必要はありません。もし不明な点があれば、土基までお尋ね下さい。

問題 30.1. 本問では α,β をあなたが選んだ具体的な整数 (ただし、$\alpha \neq \beta$ を選んで解答の最初に明記した上で、α,β にそれらの整数をあてはめた上で解答せよ。解答には α,β を含まないように、30 名程度の解答者の中で、おなじ数の組が選ばれることがないように留意すること。

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

とおく。以下、[要約] 系 11.1 の方針に追随する。(番号は必ずしも対応していない。) が、解答は必ずしも講義でやった (補題 11.5 に沿った) 方針で行う必要はない。

(1) $a(X)(X-\alpha)^2 + b(X)(X-\beta)^3 = 1$ を満たす $a,b \in \mathbb{C}[X]$ の例を求めなさい。

[正攻法の解]

$$\begin{aligned}(X-\beta)^3 - (\alpha-\beta)^3 &= X^3 - 3\beta X^2 + 3\beta^2 X - 3\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta - \alpha^3 \\ &= (X-\alpha)(X^2 + (\alpha-3\beta)X + 3\beta^2 - 3\alpha\beta + \alpha^2)\end{aligned}$$

$$\left(\frac{X-\beta}{\alpha-\beta}\right)^3 - 1 = \frac{1}{(\alpha-\beta)^3}(X-\alpha)(X^2 + (\alpha-3\beta)X + 3\beta^2 - 3\alpha\beta + \alpha^2)$$

両辺を 2 乗するとよい。

$$a(X) = \frac{1}{(\alpha-\beta)^6}(X^2 + (\alpha-3\beta)X + 3\beta^2 - 3\alpha\beta + \alpha^2)^2$$

である。

[別解]

$$(X-\alpha) - (X-\beta) = (\beta-\alpha)$$

の両辺を 5 乗して、二項定理を用いる

$$\sum_{j\geq 2}\binom{5}{j}(X-\alpha)^j(-(X-\beta))^{5-j} + \sum_{j<2}\binom{5}{j}(X-\alpha)^j(-(X-\beta))^{5-j} = (\beta-\alpha)^5$$

$$a(X)=\frac{1}{(\beta-\alpha)^5}\sum_{j\geq 2}\binom{5}{j}(X-\alpha)^{j-2}(-(X-\beta))^{5-j}$$
$$=-\frac{1}{(\beta-\alpha)^5}(4X^3+15\beta X^2-3\alpha X^2-20\beta^2X+10\alpha\beta X-2\alpha^2X$$
$$+10\beta^3-10\alpha\beta^2+5\alpha^2\beta-\alpha^3)$$

(2) (1) の a に対して、 $P=a(A)(A-\alpha)^2$ を求めよ。
(答)$t=\beta-\alpha$, $s=1/t$ とおくと、

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & s^2 & -2s^3 & 3s^4 \\ 0 & 0 & s & -s^2 & s^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) (2) の P に対して、$P^2=P$ を確認せよ。

(4) (3) の P に対して、Image P の基底をうまくとり、A (AP としても同じ) が Image P 上 標準形であるようにせよ。
(答) $B=P-\beta 1_5$ とおく。$B^3P=0$ で、

$$B^2P\mathbb{e}_5={}^t\begin{pmatrix}\frac{1}{t^2} & \frac{1}{t} & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}:=\mathbb{v}_1$$
$$BP\mathbb{e}_5={}^t\begin{pmatrix}-\frac{2}{t^3} & -\frac{1}{t} & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}:=\mathbb{v}_2$$
$$P\mathbb{e}_5={}^t\begin{pmatrix}\frac{3}{t^4} & \frac{1}{t^3} & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}:=\mathbb{v}_3$$

　これらのベクトルを並べる。 $B\mathbb{v}_3=\mathbb{v}_2$, $B\mathbb{v}_2=\mathbb{v}_1$, $B\mathbb{v}_1=0$ であるから、基底 $\{\mathbb{v}_1,\mathbb{v}_2,\mathbb{v}_3\}$ にたいして B は

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

と表現される。これはつまり

$$B\left(\mathbb{v}_1\mathbb{v}_2\mathbb{v}_3\right)=\left(\mathbb{v}_1\mathbb{v}_2\mathbb{v}_3\right).\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

という意味である。、A は基底 $\{\mathbb{v}_1,\mathbb{v}_2,\mathbb{v}_3\}$ にたいして

$$\begin{pmatrix}\beta & 1 & 0\\ 0 & \beta & 1\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}$$

と表現される。これは同様に

$$\left(\mathbb{v}_1\mathbb{v}_2\mathbb{v}_3\right)=\left(\mathbb{v}_1\mathbb{v}_2\mathbb{v}_3\right).\begin{pmatrix}\beta & 1 & 0\\ 0 & \beta & 1\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}$$

という意味である。

(5) (必要なら $Q=1_4-P$ に対して同じことを考え、)A のジョルダンの標準形を上のことに沿ってもとめよ。

(答) $C=A-\alpha 1_5$, $Q=1_5-P$ とおく。
　$C^2Q=0$ であって、$C.Q\mathbb{e}_2=\mathbb{e}_1$ であるから $\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_2$ が標準形を作るために使える。

まとめると、$R = (\mathbb{e}_1 \mathbb{e}_2 \mathbb{v}_1 \mathbb{v}_2 \mathbb{v}_3)$ とおけば、R は正則行列であって、

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

である。これは A の一つのジョルダンの標準形である。 $\square$