線形代数学 II NO.1 要約

今日のテーマ: **授業の目標, ベクトル空間及び線形写像の復習。**

「スカラー」の集合を一つ決めておかなければならない。

定義 1.1. K が**体**であるとは、K が和、差、積、商について閉じた集合であるときにいう。詳しくいうと K が体であるとは、K が和 $(+)$、積２つの演算について閉じていて、以下の条件を満たすときに言う。詳しくは体論でやる。

(1) K は和について可換群である。すなわち
  (a) 和は結合的である。 $(a+b)+c = a+(b+c)$ $(\forall a,b,c \in K)$.
  (b) K には 0_K と呼ばれる特別の元があって、$x + 0_K = x = 0_K + x$ $(\forall x \in K)$ がなりたつ。
  (c) K の任意の元 x に対して、その反元 $-x$ と呼ばれる元が存在して、$x + (-x) = 0_K = (-x) + x$ を満たす。
(2) K は積について可換半群である。つまり、結合法則 $a(bc) = (ab)c$ $(\forall a,b,c \in K)$ がなりたつ。
(3) 分配法則 $a(b+c) = ab+ac$, $(b+c)a = ba+ca$ $(a,b,c \in K)$ が成り立つ。
(4) $K \setminus \{0\}$ は積について群である。つまり
  (a) K には 1_K と呼ばれる特別の元があって、$x \cdot 1_K = x = 1_K \cdot x$ $(\forall x \in K)$ がなりたつ。
  (b) K の任意の元 x に対して、その逆元 x^{-1} と呼ばれる元が存在して、$x \cdot (x^{-1}) = 1_K = (x^{-1}) \cdot x$ を満たす。

本講義では K としては $\mathbb{R}$ をよく用いるが、$K = \mathbb{C}$ の場合を考えることも時には必要である。

$K = \mathbb{R}$ としたときのベクトル空間を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とか、**実ベクトル空間**といい、$K = \mathbb{C}$ としたときのベクトル空間を$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とか、**複素ベクトル空間**と呼ぶ。

ベクトル空間とは、その中で和とスカラー倍ができるような集合のことである。ただし和とスカラー倍は次の法則を満たす必要がある。

(1) $(\mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2) + \mathbb{v}_3 = \mathbb{v}_1 + (\mathbb{v}_2 + \mathbb{v}_3)$ $(\forall \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3 \in V)$.
(2) $\mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2 = \mathbb{v}_2 + \mathbb{v}_1 (\forall \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2 \in V)$.
(3) $\exists 0_V \in V$ such that $0_V + \mathbb{v} = \mathbb{v} + 0_V = \mathbb{v}$ $(\forall \mathbb{v} \in V)$.
(4) 任意の $\mathbb{v} \in V$ にたいして $-\mathbb{v}$ という V の元が取れて $\mathbb{v} + (-\mathbb{v}) = 0_V$ を満たす。
(5) $c_1.(c_2.\mathbb{v}) = (c_1 \cdot c_2).\mathbb{v}$ $(\forall c_1, c_2 \in K, \forall \mathbb{v} \in V)$.
(6) $1_K.\mathbb{v} = \mathbb{v}$ $(\forall \mathbb{v} \in V)$
(7) $(c_1 + c_2).\mathbb{v} = c_1\mathbb{v} + c_2\mathbb{v}$ $(\forall c_1, \forall c_2 \in K, \forall v \in V)$
  $c.(\mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2) = c\mathbb{v}_1 + c\mathbb{v}_2$ $(\forall c \in K, \forall \mathbb{v}_1, \forall \mathbb{v}_2 \in V)$

ベクトル空間 V, W にたいして、V から W への**線形写像**とは、V から W の写像であって、和とスカラー倍を保つもののことである。

V,W の基底をとることで、線形写像は行列で表せるのであった。行列としては何でもありうるわけだが、基底のとり方を上手に選べば、簡単な行列を扱うだけで済むようにできる場合がある。

とくに、$V = W$ の場合が本講義の主題である。この場合には、 $\mathbb{v}$ と $A\mathbb{v}$ とを比較できるということが一般の場合と異なる。

一番基本的なのは対角行列である。

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

これらは**基本ベクトルたちをその定数倍に写す** という大事な性質を持つ。

本講義では、次のようなことについて学ぶ:

- **計量ベクトル空間** について。
  - 計量ベクトル空間とは、「長さ」と「角度」を扱うことのできるようなベクトル空間である。
  - シュミットの直交化法
  - 直交射影とそれを表す行列
- **正方行列の標準形**について。
  - 固有値と固有ベクトル
  - 行列の対角化 (できる場合。)
  - 弱固有値と弱固有空間
  - 行列のジョルダンの標準形 (一般の場合)