線形代数学 II NO.2 要約

今日のテーマ: **計量ベクトル空間**

定義 2.1. 実ベクトル空間 V が与えられているとする。$V \times V$ から $\mathbb{R}$ への正定値対称双線形写像を V の**内積**と呼ぶ。具体的には次の条件を満たすものが内積である。

(1) $\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = \mathbb{b} \cdot \mathbb{a} \qquad (\forall \mathbb{a}, \mathbb{b} \in V)$
(2) $\mathbb{a} \cdot (\mathbb{b} + \mathbb{c}) = \mathbb{a} \cdot \mathbb{b} + \mathbb{a} \cdot \mathbb{c} \qquad (\forall \mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in V)$
(3) $(\mathbb{a} + \mathbb{b}) \cdot \mathbb{c} = \mathbb{a} \cdot \mathbb{c} + \mathbb{b} \cdot \mathbb{c} \qquad (\forall \mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in V)$
(4) $(c\mathbb{a}) \cdot \mathbb{b} = \mathbb{a} \cdot (c\mathbb{b}) = c(\mathbb{a} \cdot \mathbb{b}) \qquad (\forall \mathbb{a}, \mathbb{b} \in V, \forall c \in \mathbb{R})$
(5) $\mathbb{a} \cdot \mathbb{a} \geq 0. \qquad \mathbb{a} \cdot \mathbb{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{a} = \mathbf{0}. \qquad (\forall \mathbb{a} \in V)$

内積を持つベクトル空間を **計量ベクトル空間** と呼ぶ。

定義 2.2. 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ には

$$(a_i) \cdot (b_i) = \sum_i a_i b_i$$

によって内積が入る。これを $\mathbb{R}^n$ の標準的な内積と呼ぶ。

定義 2.3. 計量ベクトル空間 V に対して V の元 $\mathbb{v}$ の**長さ** を

$$||\mathbb{v}|| = \sqrt{\mathbb{v} \cdot \mathbb{v}}$$

で定める。

命題 2.4 (長さと内積の関係)**.** 計量ベクトル空間 V の元 $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ に対して、つぎの等式が成り立つ。

(1) $\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = \frac{1}{4}(||\mathbb{a} + \mathbb{b}||^2 - ||\mathbb{a} - \mathbb{b}||^2)$
(2) $||\mathbb{a} + \mathbb{b}||^2 + ||\mathbb{a} - \mathbb{b}||^2 = 2(||\mathbb{a}||^2 + ||\mathbb{b}||^2)$

定理 2.5. 計量ベクトル空間 V の元 $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ に対して、つぎの等式が成り立つ。

(1) (シュヴァルツの不等式) $||\mathbb{a} \cdot \mathbb{b}|| \leq ||\mathbb{a}||\ ||\mathbb{b}||$
(2) (三角不等式) $||\mathbb{a} + \mathbb{b}|| \leq ||\mathbb{a}|| + ||\mathbb{b}||$

ベクトルのなす角

命題 2.6. 計量ベクトル空間 V の $\mathbf{0}$ でない 元 $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ に対して、つぎの等式を満たす θ が $[0, \pi]$ に一意に存在する。

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbb{a} \cdot \mathbb{b}}{||\mathbb{a}||\ ||\mathbb{b}||}$$

この θ を $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の**なす角**と呼ぶ。

計量ベクトル空間 V の元 $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ に対して、$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = \mathbf{0}$ のとき 2 つのベクトルは直交するという。これは 2 つのベクトルのなす角が $\pi/2$ であるということとほぼ同じだが、2 つのベクトルのうち一方が $\mathbf{0}$ のときにもこの表現を使うところに少し注意を要するかもしれない。