微分積分学概論 NO.1 補遺

要約 No.1「この講義で用いて良いもの」について
もう少し詳しくは本講義教科書 p.3 を参照のこと。項目だけ書いておくと、
(A) 四則演算
(B) 順序

(0) $a, b \in \mathbb{R}$ について、 $a = b, a < b, b > a$ のいずれか一つが成り立つ。
(1) $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$ and $b < c \implies a < c$.
(2) $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b \implies a + c < b + c$
(3) $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b, c > 0 \implies ac < bc$

である。少し難しい言葉で言えば、「$\mathbb{R}$ は順序体である」ということを認めることにする。ということである。「順序体」の定義や性質を詳しく知りたければ、wikipedia でも見てみると詳しいことがわかるかもしれない。言わずもがなだが、定義は wikipedia のものを用いても良いが、諸結果についてはむやみに鵜呑みにするのではなく、もし用いる場合には証明を自分でつけること。

本講義ではほかに命題論理の取り扱い、とくに and,or,not, $\forall$, $\exists$ が重要である。詳細については ググるか、土基の昔書いた pdf
◎ and, or, not: 2013 年度論理と集合 No.01
◎ $\forall$ と $\exists$: 2013 年度論理と集合 No.03
を参照のこと。

例: P が真ならば P を、偽ならば not P を証明せよ。

Level 1: $\forall, \exists$ が合計 1 個の命題
• $P_1 = (\exists x \in \mathbb{R}(x > 1500))$
(答) $x = 2000$ と取れば、 $x > 1500$.
(頭の中で 1500 より大きい実数だから、そんなのあるやんと即答するとか、もじもじする、とかでは不十分で、ここはハッキリと具体的な値を書くべきである。)
• $P_2 = (\exists x \in \mathbb{R}(x^2 < 1500))$
(答) $x = 1$ と取れば、 $x^2 = 1 < 1500$.
• $P_3 = (\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \geq 0))$.
(答) (B0) ($a = x, b = 0$ の場合に用いる) に注意すると、つぎの 3 つの場合に分けられる。
$x > 0$ ならば $x^2 > 0$. (とくに $x^2 \geq 0$.)($\because$B3)
$x = 0$ ならば $x^2 = 0 \geq 0$.
$x < 0$ ならば、両辺に $-x$ を加えて、 $0 < -x$ ($\because$ A).
よって (先に示したように) $(-x) \cdot (-x) > 0$. 左辺を展開して $x^2 > 0$ ($\because$A).

Level 2: $\forall, \exists$ が合計 2 個の命題
• $P_4 = (\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(y^2 = x))$
(答) not $P_4 = \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(y^2 \neq x)$
$x = -1$ とおく。 $\forall y \in \mathbb{R}$ にたいして、 $y^2 \geq 0$ であるから $y^2 \neq -1$ である。よって、not P_4 が真であり、P_4 は偽である。

Level 3: $\forall, \exists$ が合計 3 個の命題

• $P_5 = \forall x \in \mathbb{R} l l y \in R_{>x} \exists z \in \mathbb{R}(y > z > x)$. (答) 任意の $x, y\mathbb{R}$ $(y > x)$ に対して、$z = \frac{x+y}{2}$ とおけば $y - z = \frac{y-x}{2} > 0$ ゆえに $y > z$ 同様にして、 $z > x$ である。
• $P_6 = \forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in Z_{>x} \exists z \in \mathbb{Z}(y > z > x)$.
(答) not $P_6 = \exists x \in \mathbb{Z} \exists y \in Z_{>x} \forall z \in \mathbb{Z}(y \notin (x, z))$ $x = 0 \in \mathbb{Z}, y = 1 \in \mathbb{Z}_{>0}$ とおけば 0 と 1 の間に整数は存在しないから not P_6 が真であり、 P_6 は偽である。