微分積分学概論要約 NO.5

第５回目の主題：$\boxed{\text{単調数列}}$
次の公理は実数の基本的な性質であった。

公理 5.1. (再掲) $\mathbb{R}$ の部分集合 A が上に有界ならば、A は上限を持つ。

定義 5.2. $\mathbb{R}$ の部分集合 A に対して、その上限のことを $\sup(A)$ と書く。

補題 5.3. 集合 A の上限が α であることは、次の二条件が同時に成り立つことと同値である。

(1) $\forall x \in A \quad (x \leq \alpha)$.
(2) $\forall \epsilon > 0 \exists x \in A (x > \alpha - \epsilon)$.

数列 $\{a_n\}$ を単なる集合と見てそれが有界かどうか、やその上限 $\{a_n\}$ を議論することができる。公理 5.1 により、上に有界な数列は上限を持つことがわかる。

定義 5.4. 実数列 $\{a_n\}$ が**単調増加**であるとは、

$$\forall n \forall m (n \geq m \implies a_n \geq a_m)$$

がなりたつときにいう。

もっと露骨に言えば $\{a_n\}$ が単調増加であるとは

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \dots$$

が成り立つということである。

補題 5.5. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

で定義する。このとき

(1) $\{a_n\}$ は単調増加である。
(2) $\{a_n\}$ は有界である。

定義 5.6. 上限

$$\sup \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

のことを**自然対数の底**とよび、e と書く。(注意: この定義は教科書のものとは少し異なる。が、結局は同じ値のものであることが後に証明できる。)

定理 5.7. 上に有界な単調増加数列はその上限に収束する。

問題 5.1.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}$$

で定義される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示しなさい。
ヒント: $k > 1$ に対して、

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

に注意。

A	α	alpha	アルファ
B	β	beta	ベータ
Γ	γ	gamma	ガンマ
Δ	δ	delta	デルタ
E	ϵ, ε	epsilon	イプシロン
Z	ζ	zeta	ゼータ
H	η	eta	エータ
Θ	θ, ϑ	theta	シータ
I	ι	iota	イオタ
K	κ	kappa	カッパ
Λ	λ	lambda	ラムダ
M	μ	mu	ミュー
N	ν	nu	ニュー
Ξ	ξ	xi	グザイ
O	o	omicron	オミクロン
Π	π, ϖ	pi	パイ
P	ρ, ϱ	rho	ロー
Σ	σ, ς	sigma	シグマ
T	τ	tau	タウ
Υ	υ	upsilon	ウプシロン
Φ	ϕ, φ	phi	ファイ
X	χ	chi	カイ
Ψ	ψ	psi	プサイ
Ω	ω	omega	オメガ

ギリシャ文字の表。

● 左から順に、大文字、小文字、英語での読み、日本語での読み方を書いた。(ただし、「日本語での読み方」はだいたいの目安に過ぎない。)

● A, B, E など、通常のアルファベットと同じに見える文字は、ふつうは数学では用いられない。

● 逆に、同じ読みでも二つ以上の文字がある場合、数学では二つを区別し、それぞれ別の意味で用いることがある。