

微分積分学概論期末試験的な問題 NO.60

出席番号、名前： _____

- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。
- 本稿は現在暫定版です。間違いがある場合などに予告なしに変更される可能性があります。もし不明な点があれば、土基までお尋ね下さい。

問題 60.1. 次の各問いに答えなさい。

- (1) X は \mathbb{R} の部分集合であるとする。「関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が一様連続でない」ということを $\forall, \exists, \text{and}, \text{or}, \text{not}$ を用いて書き下しなさい。
- (2) \mathbb{R} 上で連続だが、一様連続ではない関数を挙げて、それが連続であること、一様連続ではないことをそれぞれ示しなさい。

問題 60.2. f は \mathbb{R} 上の連続関数で、 $f(0) = 0$ を満たすとする。 \mathbb{R} 上の関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ 2 + x & (x \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する。関数 $h(x) = f(x)g(x)$ は \mathbb{R} 上で連続であることを示しなさい。

問題 60.3 (追加). [この問題は間違えていたので、時間を費やした人のためにこの形で(反例を挙げる形という問題の形で)残しておきます。無理にとく必要はありません。] X は $a \in \mathbb{R}$ を含む \mathbb{R} の開区間であるとする。次の各問いに答えなさい。(解答の順序は問わない。)

- (1) f が X で連続な \mathbb{R} 値関数であるとき、

$$g(x) = \frac{(x^2 - 5x)f(x) - (a^2 - 5a)f(a)}{x - a}$$

は X で連続なこと(正確には: 分母が0のところ ($x = a$) では定義されていないのでそのところをうまく拡張して連続な関数に拡張できること)の反例を挙げなさい。
