やってみよう問題 No.5 の (2) について、過去に質問が出たことがあるので答えておく。

$\mathbb{v}_2$ を U_1 方向と ${U_1}^\perp$ 方向に分解する。

$$\mathbb{v}_2 = (\mathbb{v}_2)_{U_1} + (\mathbb{v}_2)_{U_1^\perp} \quad ((\mathbb{v}_2)_{U_1} \in U_1, (\mathbb{v}_2)_{U_1^\perp} \in U_1^\perp)$$

$$U_1 = \mathbb{R}\mathbb{v}_1 (= \mathbb{R}\mathbb{w}_1)$$

で、与えられたベクトルの内積を計算すると $(\mathbb{v}_1 \cdot \mathbb{v}_2) = 0$ すなわち

$$\mathbb{v}_1 \perp \mathbb{v}_2$$

であるから、じつは $\mathbb{v}_2 \in U_1^\perp$ で、したがって

$$(\mathbb{v}_2)_{U_1^\perp} = \mathbb{v}_2, \quad (\mathbb{v}_2)_{U_1} = \mathbf{0},$$

であることがわかる。こっちのほうが正統で、まっとうな理解ではあるのだが、ある年度の講義の方ではもう一つべつのやり方で説明したのでそちらについても述べておく。

U_1 は 一次元で、$\mathbb{w}_1$ で生成されるのだから、ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$\mathbb{v}_2 = (\mathbb{v}_2)_{U_1} + (\mathbb{v}_2)_{U_1^\perp} = \lambda\mathbb{w} + (\mathbb{v}_2)_{U_1^\perp}$$

両辺と $\mathbb{w}$ との内積をると、$(\mathbb{w} \cdot \mathbb{v}_2) = \lambda$. 先程述べたようにこの問題では $(\mathbb{w} \cdot \mathbb{v}_2) = 0$ であるから、

$$(\mathbb{v}_2)_{U_1} (= ((\mathbb{w} \cdot \mathbb{v}_2)\mathbb{w}) = \mathbf{0}, \quad (\mathbb{v}_2)_{U_1^\perp} = \mathbb{v}_2$$

である。

同じような議論で、次が得られる。

定理 0.1. *U が V の有限次元部分ベクトル空間で、その正規直交基底が $\mathbb{w}_1, \mathbb{w}_2, \dots, \mathbb{w}_k$ で与えられたとすると、$\mathbb{v} = (\mathbb{v})_U + (\mathbb{v})_{\mathrm{U}^\perp}$ と $\mathbb{v}$ を U 方向と $U^\perp$ 方向に分けて書いたときの U -成分は*

$$\mathbb{v}_U = (\mathbb{v} \cdot \mathbb{w}_1)\mathbb{w}_1 + (\mathbb{v} \cdot \mathbb{w}_2)\mathbb{w}_2 + (\mathbb{v} \cdot \mathbb{w}_3)\mathbb{w}_3 + \cdots + (\mathbb{v} \cdot \mathbb{w}_k)\mathbb{w}_k$$

であたえられる。(したがってまた (当然ながら)

$$\mathbb{v}_{U^\perp} = \mathbb{v} - ((\mathbb{v} \cdot \mathbb{w}_1)\mathbb{w}_1 + (\mathbb{v} \cdot \mathbb{w}_2)\mathbb{w}_2 + (\mathbb{v} \cdot \mathbb{w}_3)\mathbb{w}_3 + \cdots + (\mathbb{v} \cdot \mathbb{w}_k)\mathbb{w}_k)$$

である。)

証明. U の元 $\mathbb{v}_U$ を U の基底 $\{\mathbb{w}_i\}_{i=1}^k$ を用いて

$$v_U = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{w}_i$$

と書いておく。

$$\mathbb{v} = (\mathbb{v})_U + (\mathbb{v})_{U^\perp} = \lambda_1\mathbb{w}_1 + \lambda_2\mathbb{w}_2 + \lambda_3\mathbb{w}_3 + \cdots + \lambda_k\mathbb{w}_k + (\mathbb{v})_{U^\perp}$$

の両辺と $\mathbb{v}$ との内積をとれば $\lambda_i = (\mathbb{v} \cdot \mathbb{w}_i)$ $(\forall i)$ がわかる。 $\square$