線形代数学 II NO.9 要約

今日のテーマ: **行列の対角化。**

今回も引き続き、行列は複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。

(1) n 次正方行列 A に対して、A の固有多項式 $\det(xE_n - A)$ の根が A の固有値。

(2) λ が A の固有値 $\Leftrightarrow$ $(A - \lambda E_n)\mathbb{x} = \mathbf{0}$ が非自明な解を持つ。 この解が A の (固有値 λ に属する) 固有ベクトルである。

(3) $k \leq n$ に対して、

$$A\mathbb{x}_i = \lambda_i \mathbb{x}_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, k)$$

という等式を得たならば、それらを並べる (連結する) ことができる。じっさい、$P = (\mathbb{x}_1 \mathbb{x}_2 \mathbb{x}_3 \ldots \mathbb{x}_k)$ をもちいて、

$$AP = PD \qquad (\text{但し } D = \mathrm{diagonal}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k))$$

と書ける。ここのところは、

$$\mathbb{x}_i \overset{A\times}{\mapsto} A\mathbb{x}_i$$

が P により、

$$\mathbb{e}_i \overset{D\times}{\mapsto} \lambda_i \mathbb{e}_i$$

と比べられることを意味している。

(4) とくに、A の固有ベクトルたちで、n 個の一次独立なものが見つかれば、A を対角化できる。