多変数の微分積分演習問題 NO.1

問題 1.1. $\mathbb{R}^2$ の部分集合で、開集合でも閉集合でもないものの例をあげよ。(もちろん理由も述べること) 一人 1 個を限度とするが、本年度履修生全体としては何個上げていただいても構わない。ただし、オリジナリティー、簡明さを考慮すること。(つまり似たようなものは一個にカウントされないのでご注意。)

問題 1.2. $\mathbb{R}^2$ の開円板は開集合であることを示せ。

問題 1.3. $\mathbb{R}^2$ の開円板は閉集合でないことを示せ。

問題 1.4. $\mathbb{R}^2$ の閉円板は閉集合であることを示せ。

問題 1.5. $\mathbb{R}^2$ の閉円板は開集合でないことを示せ。

問題 1.6. 開区間 (a, b) は $\mathbb{R}$ の部分集合としては 開集合であるが、$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in (a, b) \text{ and } y = 0\}$ は R^2 の開集合ではないことを示せ。

問題 1.7 (位相空間論を正しく履修のあとでよい。)**.** 開区間 (a, b) と $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in (a, b) \text{ and } y = 0\}$ は (通常の位相で) 同相であることを示しなさい。

問題 1.8. 任意の正の整数 n に対して、$\mathbb{R}^n$ の開球は開集合であることを示せ。

問題 1.9. 任意の正の整数 n に対して、$\mathbb{R}^n$ の開球は閉集合でないことを示せ。

問題 1.10. 任意の正の整数 n に対して、$\mathbb{R}^n$ の閉球は閉集合であることを示せ。

問題 1.11. 任意の正の整数 n に対して、$\mathbb{R}^n$ の閉球は開集合でないことを示せ。

問題 1.12. 任意の正の整数 n に対して、$\mathbb{R}^n$ の開集合の有限個の共通部分は開集合であることを示せ。

問題 1.13. 任意の正の整数 n に対して、$\mathbb{R}^n$ の閉集合の任意個 (無限個かもしれない) の共通部分は閉集合であることを示せ。

問題 1.14. 任意の正の整数 n に対して、$\mathbb{R}^n$ の閉集合の有限個の和集合は閉集合であることを示せ。

問題 1.15. 任意の正の整数 n に対して、$\mathbb{R}^n$ の開集合の任意個 (無限個かもしれない) の和集合は開集合であることを示せ。

問題 1.16. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$ のグラフをかけ。

問題 1.17. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y^2$ のグラフをかけ。

問題 1.18. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y^3$ のグラフをかけ。

問題 1.19. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^3$ のグラフをかけ。

問題 1.20. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y)$ のグラフをかけ。

問題 1.21. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^x \sin(y)$ のグラフをかけ。

問題 1.22. $V, \langle \bullet \rangle$ を実計量ベクトル空間とし、任意の $x, y \in V$ を取る。このとき:

(1) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、
$$\lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0$$
であることを確認せよ。

(2) (コーシー・シュワルツの不等式) 前小問と高校時代の二次式の知識を使って
$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| ||y||$$
であることを示せ。ただし $v \in V$ に対して、$||v|| \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{\langle v, v \rangle}$ と書くことにする。

問題 1.23 (三角不等式)**.** $V, \langle \bullet \rangle$ を実計量ベクトル空間とし、任意の $x, y \in V$ を取る。このとき:
$$||x + y|| \geq ||x|| + ||y||$$
が成り立つことをコーシー・シュワルツの不等式を用いて示せ。

問題 1.24. (1) 実ノルム空間の定義を (教科書、ネット等を調べて) 書け。

(2) $V, \langle \bullet \rangle$ を実計量ベクトル空間とし、$||v|| \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{\langle v, v \rangle}$ と書くことにする。このとき $V, || \bullet ||$ は 実ノルム空間であることを示せ。

ここから下は主に進んで勉強したい人向けの補充問題である。

問題 1.25. 複素ベクトル空間 V のエルミート内積の定義と複素計量ベクトル空間の定義を調べてかけ。

問題 1.26. 複素計量ベクトル空間 V のコーシー・シュワルツの不等式を証明せよ。

問題 1.27. 複素計量ベクトル空間 V での三角不等式を証明せよ。

問題 1.28. 複素計量ベクトル空間 $(V, \langle \bullet \rangle)$ が与えられたとする。このとき $(V, \Re(\langle \bullet \rangle))$ は実計量ベクトル空間である (ただしこの講義では一般に $\Re(a)$ は複素数 a の実部を表す記号である。)