多変数の微分積分演習問題 NO.05

以下の各問において、とくに断りのない限り $\mathbb{R}^n$ にはノルム $||(v_1, v_2, \ldots, v_n)|| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$ が入っているものとする。

問題 5.1.

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

が成り立つのは $[0,1]$ の各点 t で $f(t) = 0$ が成り立つときに限る。

定理 5.1. 任意の非負連続関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して、f は $[0,1]$ で *(*リーマン*)* 積分可能で、なおかつ

$$\int_0^1 f(x)dx \geq 0$$

である。

を以下では自由に使って良いことにする。さらに、リーマン積分の加法性

$$\int_0^1 (f+g)dx = \int_0^1 (f)dx + \int_0^1 (g)dx$$

も使って良いこととする。

問題 5.2.

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

が成り立つのは $[0,1]$ の各点 t で $f(t) = 0$ が成り立つときに限る。

問題 5.3. $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}; f : \text{連続}\}$ に $\langle f \bullet g \rangle$ を導入する。$(C[0,1], \langle \bullet \rangle\ )$ は計量ベクトル空間であることを示しなさい。

問題 5.4. $[0,1]$ 上の $\mathbb{R}^n$-値連続関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ が与えられていたとする。$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))\ (t \in [0,1]))$ と成分で書いた時、各 $f_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ はそれぞれ一様連続であることを示しなさい。ただし 有界閉区間 $[0,1]$ 上の一変数実数値連続関数に関する一様連続性の定理は証明なしに使って良いこととする。

問題 5.5. 前問と同じ仮定のもとで、f は次の意味で一様連続であることを示しなさい。

$$\epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ such that } (t_1, t_2 \in [0,1], |t_1 - t_2| < \delta \implies ||f(t_1) - f(t_2)|| < \epsilon)$$

問題 5.6. $I=[0,1]$ 上の任意の連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ は区分的に定数であるような関数で一様に近似できる。すなわち、f が与えられた時、任意の $\epsilon>0$ に対して、I の分割

$$(I=[0,a_1]\cup[a_1,a_2]\cup\ldots[a_n,1]=I_1\cup I_2\cup\ldots\cup I_n)$$

$(a_1<a_2<\cdots<a_n<1$ $)$ とと I 上の関数 h で、

(1) h は 各 $\overset{\circ}{I}_i=(a_i,a_{i+1})$ $(i=0,1,\ldots,n$ $)$ 上で定数関数に等しい. (“h は区分的に定数である。” と称する) ただし、うえで $a_0=0,a_{n+1}=1$ とする。

(2) $\sup_{t\in I}|(h(t)-f(t))|\le\epsilon$. (“$h$ は f の ϵ-近似である。” と称する)

を同時にみたすものが存在する。

問題 5.7. 連続関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ と, f の ϵ-近似であって、て区分的に定数であるような関数 h が与えられているとする。このとき、

$$||\int_I f(t)dt-\int_I h(t)dt||\ge n\epsilon$$

問題 5.8. 任意の連続関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ に対して、$f,||f||$ はともに $[0,1]$ で積分可能であり、

$$||\int_0^1 f(x)dx||\le\int_0^1||f(x)||dx$$

であり、等号が成り立つのは $[0,1]$ の各点 t で $f(t)=0$ が成り立つときに限る。