多変数の微分積分解 NO.2 要約

今日のテーマ 《多変数関数の連続性と極限》

定義 2.1. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S 上で定義された関数 f の、点 P での**極限**が α であるとは、

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \, (Q \in S \cap (B_\delta(P) \setminus \{P\}) \implies |f(Q) - \alpha| < \epsilon)$$

を満たすときに言う。

この定義は一変数の場合と形式的には同じであるが、一変数の場合と違って多変数の場合には「点への近づき方」がいろいろあるので注意が必要である。

補題 2.2. 上の定義で、S の点列 $\{P_j\}_{j=1}^\infty$ で、P に収束するものがあったと仮定する。このとき、

$$\lim_{j \to \infty} f(P_j) = \alpha.$$

とくに、 極限 α は一意的である。

定義 2.3. 上の一意的な極限を

$$\lim_{\substack{Q \to P \\ Q \in S}} f(Q)$$

と書き表す。

例 2.1. 極限が存在しない例。

(1)

$$f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

は原点 $(0, 0)$ において、極限を持たない。実際、直線 $y = mx$ に沿って (x, y) を 0 に近づけると $f_1(x, y)$ は $\frac{m}{1+m^2}$ に近づき、m によってその値が異なる。

(2)

$$f_2(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

は前の例の (x, y) に (x^2, y) を代入したに過ぎないので、原点 $(0, 0)$ において、極限を持たないことがわかる。ただし、前の例のような「直線に沿って近づく」分析だけでは極限の有無を判定できないことに注意。

定義 2.4. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S 上で定義された関数 f が点 P で**連続**であるとは、

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \, (Q \in S \cap B_\delta(P) \implies |f(Q) - f(P)| < \epsilon)$$

を満たすときに言う。(考えている定義域 S が明らかな場合には $Q \in S$ の部分は省略することが多い。)

問題 2.1.

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + 2y^2}$$

は存在するだろうか。理由を挙げて答えなさい。(ヒント: (x, y) と $(0, 0)$ の距離を d とおくと、$x = dx_1, y = dy_1$ となる (x_1, y_1) が存在して、$x_1^2 + y_1^2 = 1$. d, x_1, y_1 を用いて上の極限を表現してみよ。)