多変数の微分積分 NO.6 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$《積分による表示、多変数関数のテイラー展開。》

今回の話では、つぎのようなことをたびたび用いる。

補題 6.1. $[a,b]$ 上定義された(実数値もしくはベクトル値)連続関数 f に対して

$$||\int_a^b f(t)dt|| \leq \int_a^b ||f(t)||dt$$

が成り立つ。

先週、定理 5.3 の証明が残っていた。次のような積分の計算が基本になる。 まずは微積分の基本定理から容易に従う一変数の場合。

$$f(x) = f(a) + (x-a)\int_0^1 f'(a+(x-a)t)$$

次は、それを用いた二変数の場合。

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,y) + (x-a)\int_0^1 f_x(a+(x-a)t,y)dt \\ =f(a,b) + (y-b)\int_0^1 f_y(a,b+(y-b)t)dt \\ +(x-a)\int_0^1 f_x(a+(x-a)t,y)dt \end{aligned}$$

ついでに、三変数だと以下のようになる。

$$\begin{aligned} f(x,y,z) =& f(a,b,z) + (y-b)\int_0^1 f_y(a,b+(y-b)t,z)dt \\ &+(x-a)\int_0^1 f_x(a+(x-a)t,y,z)dt \\ =& f(a,b,c) + (z-c)\int_0^1 f_z(a,b,c+(z-c)t)dt \\ &+(y-b)\int_0^1 f_y(a,b+(y-b)t,z)dt \\ &+(x-a)\int_0^1 f_x(a+(x-a)t,y,z)dt \end{aligned}$$

以上は、偏微分は「軸方向の変化を記述する」ということからくる制限の下で、苦労して (a,b,c) から (x,y,z) に近づいた式である。一旦定理 5.3 が確定した後は、C^1 級関数は自動的に全微分可能であるから、「まっすぐ」近づくほうがわかりやすい。

定理 6.2. $\mathbb{R}^l$ の開集合 U から $\mathbb{R}^m$ への C^1 級写像 f について、U の点 a と $x = a+h$ とを含む線分が U に含まれているとするとき、等式

$$f(a+h) = f(a) + \int_0^1 Df(a+th)\cdot h dt$$

が成り立つ。

《高階微分》

定義 6.3. $\mathbb{R}^l$ の開集合 U から $\mathbb{R}^m$ への C^1 級写像 f について、

$$Df : U \ni a \mapsto Df(a) \in M_{m,l}(\mathbb{R})$$

は、$M_{m,l}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{ml}$ と同一視することで、(全) 微分可能性を議論することができる。Df の $x=a$ での微分を

$$D^2f|_{x=a}$$

と書いて, f の二階微分とよぶ。つまり、$D^2f|_{x=a}$ は、$\mathbb{R}^l$ から $M_{m,l}(\mathbb{R})$ への線型写像である。$D^2f|_{x=a}$ が各 $a \in U$ について存在して、連続であるとき、f は C^2 **級**であると呼ぶ。

命題 6.4. $\mathbb{R}^l$ の開集合 U 上定義された C^2 級 写像 $f : U \to \mathbb{R}^m$ について、

$$\begin{aligned} f(a+h) =& f(a) + Df(a)\cdot h + \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^t D^2(f(a+tsh)\cdot h)\cdot h \ dsdt \\ =& f(a) + Df(a)\cdot h + \frac{1}{2}(D^2f(a)\cdot h)\cdot h + o(||h||^2) \end{aligned}$$

が成り立つ。

微分と同様に高階微分も偏微分を用いて記述できる。

命題 6.5. $\mathbb{R}^l$ の開集合 U から $\mathbb{R}^m$ への写像 f が与えられているとする。このとき、

(1) f が C^2 級であることは、各変数に関する一回偏導関数 $f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_l}$ が存在して、そのそれぞれが C^1 級であることと同値である。

(2) f が C^2 級である時、

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$$

がなりたつ。

(2) の証明では二変数の場合が本質的である。

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)$$

を二つの道筋で積分表示することになる。

問題 6.1. 定理 6.2 に基づいて、$f(x,y) = \sin(xy^2)$ について、

$$f(a+h, b+k)$$

の h, k についての 1 次近似を求めなさい。すなわち、

$$f(a+h, b+k) = c_{00} + c_{10}h + c_{01}k + o(||(h,k)||)$$

なる実数 $c_{00}, \ldots, c_{01}$ を求めなさい。できることならば剰余項の積分表示も求めてみること。