

多変数の微分積分 NO.6 要約

今日のテーマ 《積分による表示、多変数関数のテイラー展開。》

今回の話では、つぎのようなことをたびたび用いる。

補題 6.1. $[a, b]$ 上定義された (実数値もしくはベクトル値) 連続関数 f に対して

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

が成り立つ。

先週、定理 5.3 の証明が残っていた。次のような積分の計算が基本になる。まずは微積分の基本定理から容易に従う一変数の場合。

$$f(x) = f(a) + (x - a) \int_0^1 f'(a + (x - a)t) dt$$

次は、それを用いた二変数の場合。

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, y) + (x - a) \int_0^1 f_x(a + (x - a)t, y) dt \\ &= f(a, b) + (y - b) \int_0^1 f_y(a, b + (y - b)t) dt \\ &\quad + (x - a) \int_0^1 f_x(a + (x - a)t, y) dt \end{aligned}$$

ついでに、三変数だと以下のようになる。

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(a, b, z) + (y - b) \int_0^1 f_y(a, b + (y - b)t, z) dt \\ &\quad + (x - a) \int_0^1 f_x(a + (x - a)t, y, z) dt \\ &= f(a, b, c) + (z - c) \int_0^1 f_z(a, b, c + (z - c)t) dt \\ &\quad + (y - b) \int_0^1 f_y(a, b + (y - b)t, z) dt \\ &\quad + (x - a) \int_0^1 f_x(a + (x - a)t, y, z) dt \end{aligned}$$

以上は、偏微分は「軸方向の変化を記述する」ということからくる制限の下で、苦労して (a, b, c) から (x, y, z) に近づいた式である。一旦定理 5.3 が確定した後は、 C^1 級関数は自動的に全微分可能であるから、「まっすぐ」近づくほうがわかりやすい。

定理 6.2. \mathbb{R}^l の開集合 U から \mathbb{R}^m への C^1 級写像 f について、 U の点 a と $x = a + h$ とを含む線分が U に含まれているとすると、等式

$$f(a + h) = f(a) + \int_0^1 Df(a + th) \cdot h dt$$

が成り立つ。

《高階微分》

定義 6.3. \mathbb{R}^l の開集合 U から \mathbb{R}^m への C^1 級写像 f について、

$$Df : U \ni a \mapsto Df(a) \in M_{m,l}(\mathbb{R})$$

は、 $M_{m,l}(\mathbb{R})$ を \mathbb{R}^{ml} と同一視することで、(全)微分可能性を議論することができる。 Df の $x = a$ での微分を

$$D^2f|_{x=a}$$

と書いて、 f の二階微分とよぶ。つまり、 $D^2f|_{x=a}$ は、 \mathbb{R}^l から $M_{m,l}(\mathbb{R})$ への線型写像である。 $D^2f|_{x=a}$ が各 $a \in U$ について存在して、連続であるとき、 f は C^2 級であると呼ぶ。

命題 6.4. \mathbb{R}^l の開集合 U 上定義された C^2 級写像 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ について、

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Df(a) \cdot h + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^t D^2(f(a+tsh) \cdot h) \cdot h \, dsdt \\ &= f(a) + Df(a) \cdot h + \frac{1}{2} (D^2f(a) \cdot h) \cdot h + o(\|h\|^2) \end{aligned}$$

が成り立つ。

微分と同様に高階微分も偏微分を用いて記述できる。

命題 6.5. \mathbb{R}^l の開集合 U から \mathbb{R}^m への写像 f が与えられているとする。このとき、

- (1) f が C^2 級であることは、各変数に関する一回偏導関数 $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_l}$ が存在して、そのそれぞれが C^1 級であることと同値である。
- (2) f が C^2 級である時、

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$$

がなりたつ。

(2) の証明では二変数の場合が本質的である。

$$\begin{aligned} &f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y) \\ &= hk \int_0^1 \int_0^1 f_{xy}(x+th, y+uk) dtdu \end{aligned}$$

を用いる。

問題 6.1. 定理 6.2 に基づいて、 $f(x, y) = \sin(xy^2)$ について、

$$f(a+h, b+k)$$

の h, k についての 1 次近似を求めなさい。すなわち、

$$f(a+h, b+k) = c_{00} + c_{10}h + c_{01}k + o(\|(h, k)\|)$$

なる実数 c_{00}, \dots, c_{01} を求めなさい。できることならば剰余項の積分表示も求めてみる。