多変数の微分積分 NO.8 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 一次近似、二次近似。(まとめ)

f の微分とは、f の一次近似のことなのであった。言い換えると、ベクトル a と $h=(h_i)$ とに対して、

$$f(a+h)=f(a)+\sum_i f_{x_i}(a)h_i+o(||h||).$$

微分を一次近似の言葉で解釈することにより、様々な公式が理解しやすくなり、覚えやすくなる。これは一変数でもそうで、例えば、

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))g'(a)$$

は

$$g(a+h)=g(a)+g'(a)h+o(|h|)$$

と

$$f(u+v)=f(u)+f'(u)v+o(|v|)$$

という一次近似の合成として理解できる。

f のテイラー展開とは、さらに高次の項も含めて近似を良くすることに相当する。例えば、f の二次近似は

$$f(a+h)=f(a)+\sum_i f_{x_i}(a)h_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j} f_{x_ix_j}h_ih_j+o(||h||^2).$$

である。とくに、二変数では、

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)&=f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k\\&\quad+\frac{1}{2}f_{xx}(a,b)h^2+2f_{xy}(a,b)hk+f_{yy}(a,b)k^2+o(||h,k||^2)\end{aligned}$$

という具合に書ける。二次近似が特に目だった働きを見せるのは、$Df(a)=0$ すなわち、f の 1 次近似が消えてしまっているときである。そのときには二次の項がクローズアップされることになる。二変数の場合でいえば、$f_x(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)=0$ のとき、

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{1}{2}f_{xx}(a,b)h^2+2f_{xy}(a,b)hk+f_{yy}(a,b)k^2+o(||h,k||^2)$$

が成り立つことを意味している。これは、f の (a,b) の付近での挙動が大まかに 二次式で記述できるということを言っている。

教科書の "定理 4.11(極値の判定法)" はその考えに基づいており、証明の考え方は一変数の場合に準ずる。

但し二次形式の扱い方という高次元の問題が残っていた。これについては線形代数学で扱う (かも知れない。)

二変数二次形式は例外的にやさしい。これは本質的に一変数の二次式を扱うのと同等に扱えるからである。たとえば

$$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2,\quad x^2+2xy+2y^2=(x+y)^2+y^2$$

はそれぞれ

$$x^2+2x+1=(x+1)^2,\quad x^2+2x+2=(x+1)^2+1$$

に対応している。(この考え方は式の斉次化、非斉次化の話として一般化される。)

問題 8.1. 一変数のテイラー展開の知識を用いて、固定した t について

$$\sin(t+\Delta t)=\sin(t)+c_1\Delta t+c_2(\Delta t)^2+o(|\Delta t|^2)$$

をみたす c_1, c_2 を求めなさい。(剰余項の評価等の詳細は問わない。) さらに、 $f(x,y)=x^2y$ にたいして、$f(a+h,b+k)$ を h,k について整理したものを上記の式に代入することにより、$\sin(x^2y)$ の a,b における 2 次近似を求めなさい。