

線形代数学II やってみよう問題 No.10

出席番号、名前： _____

問題 10.1. Cayley Hamilton の定理を証明しなさい。次の順序で行えば良い。

1. A の代わりに A と相似な行列 $\tilde{A} = PAP^{-1}$ で証明すれば十分である。

2. はじめから

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & w \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

($\exists B \in M_{n-1}(\mathbb{C}), \exists w \in M_{1,n-1}(\mathbb{C})$) としてよい。

3. 前小問の仮定のもと、 $f_A(x) = (x - \lambda)f_B(x)$ を証明せよ。

4. 前小問と同じ仮定のもと、

$$\begin{aligned} (A - \lambda 1_n) \cdot f_B(A) &= \begin{pmatrix} 0 & w \\ 0 & B - \lambda 1_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_B(\lambda) & * \\ 0 & f_B(B) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & w \\ 0 & B - \lambda 1_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_B(\lambda) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad (n \text{ に関する帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

を計算せよ。

問題 10.0.1. 一行感想を述べてください。

答:

一行感想以外の答えは下の線より下にかくこと。多い場合は裏にまわっても良い。